

## Übungen zur Vorlesung Stochastische Prozesse

### 4. Aufgabenblatt vom 2.5.2008

#### Aufgabe 1 - Gleichgradige Integrierbarkeit (10 Punkte)

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- a) Zeige, dass eine Teilmenge  $M \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  genau dann gleichgradig integrierbar ist, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- $\sup_{X \in M} \mathbb{E}[|X|] < \infty$ ;
- für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für alle messbaren Mengen  $A$  mit  $\mathbb{P}(A) \leq \delta$  gilt:

$$\forall X \in M \quad \mathbb{E}[\mathbf{1}_A |X|] \leq \epsilon.$$

- b) Sei nun  $\Psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\psi(x)} = 0$ . Zeige, dass  $M$  gleichgradig integrierbar ist, wenn gilt

$$\sup_{X \in M} \mathbb{E}[\psi(|X|)] < \infty.$$

Folgere, dass Mengen mit beschränkter  $L^p$  Norm für ein  $p > 1$  gleichgradig integrierbar sind.

- c) Konstruiere eine Menge  $M$ , die in  $L^1$  beschränkt aber nicht gleichgradig integrierbar ist.

#### Aufgabe 2 - Ungleichung von Azuma (10 Punkte)

- a) Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $|X| \leq 1$  fast sicher. Konstruiere eine  $\{-1, 1\}$ -wertige Zufallsvariable  $Y$  mit  $\mathbb{E}[Y|X] = X$ .
- b) Nehme an, dass  $\mathbb{E}[X] = 0$ . Folgere mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung, dass für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] \leq \cosh(\lambda) \leq e^{\lambda^2/2}.$$

- c) Sei  $M_n$  ein Martingal mit  $M_0 = 0$  und  $|M_n - M_{n-1}| \leq c_n$  fast sicher. Dann gilt

$$\mathbb{E}[e^{\lambda M_n}] \leq \exp\left(\frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{k=1}^n c_k^2\right).$$

- d) Unter diesen Voraussetzungen gilt die **Ungleichung von Azuma**:

$$\mathbb{P}[|M_n| \geq \lambda] \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right) \quad \text{für alle } \lambda \geq 0.$$

**Hinweis:** Wende die Markovungleichung mit  $f(x) = e^{\gamma x}$  an und wähle  $\gamma$  optimal.

#### Aufgabe 3 - Maximalungleichungen und große Abweichungen (10 Punkte)

- a) Zeige: Ist  $M_n$  ein Martingal, dann gilt

$$P\left[\max_{k \leq n} M_k \geq c\right] \leq e^{-tc} \mathbb{E}[e^{tM_n}] \quad \forall c > 0.$$

- b) Sei  $S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$  mit i.i.d. Zufallsvariablen  $Y_i \in \mathcal{L}^1$ ,  $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ . Beweise folgende Aussage (Satz von Chernof):

$$P\left[\max_{k \leq n} S_k \geq a \cdot n\right] \leq e^{-\Lambda^*(a) \cdot n} \quad \forall a > 0,$$

wobei  $\Lambda^*(a) = \sup_{t > 0} (ta - \Lambda(t))$ ,  $\Lambda(t) = \log \mathbb{E}[e^{tY_1}]$ .

#### Aufgabe 4 - Das Polyasche Urnenschema (10 Punkte)

In einer Urne befinden sich vor dem ersten Schritt eine rote und eine schwarze Kugel. Es wird dann eine Kugel gezogen und diese wird zusammen mit einer weiteren Kugel derselben Farbe wieder in die Urne zurückgelegt. Dieses Verfahren wird dann wiederholt.

Es bezeichne  $Y_n$  die Anzahl der roten Kugel in der Urne vor dem  $n$ -ten Ziehen und  $X_n = \frac{Y_n}{n+1}$  den Anteil der roten Kugel in der Urne.

- a) Zeige, dass  $(X_n)$  ein Martingal ist und fast sicher gegen eine Grenzzufallsvariable  $U$  konvergiert. Zeige außerdem, dass für alle  $k$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$ .
- b) Fixiere ein  $k \geq 1$ . Setze

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n + 1) \dots (Y_n + k - 1)}{(n + 1)(n + 2) \dots (n + k)}.$$

Zeige, dass  $Z_n$  ein Martingal ist. Was ist  $\mathbb{E}[U^k]$ ?

- c) Was ist die Verteilung von  $U$ ?

**Hinweis:** Beschränkte Zufallsvariablen, haben eine analytische charakteristische Funktion. Die Koeffizienten der Taylorreihe lassen sich aus den Momenten ablesen.

**(Schwerer) Zusatz:** (10 Punkte) Was ist die Grenzverteilung, wenn man zu Beginn  $l$  schwarze und  $m$  rote Kugeln in der Urne hatte? Was passiert bei mehr Farben?