Institut für angewandte Mathematik
Universität Bonn
Prof. Dr. K.-Th. Sturm
Hendrik Weber
http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~sturm/vorlesungSS08/

Übungen zur Vorlesung Stochastische Prozesse

3. Aufgabenblatt vom 25.4.2008

Aufgabe 1 - Random Walk mit Drift (10 Punkte)

Seien ξ_i i.i.d. mit $\mathbb{P}[\xi_i = +1] = p$ und $\mathbb{P}[\xi_i = -1] = q = 1 - p$. Sei $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Seien a und b positive natürliche Zahlen und $\tau = \inf\{n \colon S_n \notin]-a, b[\}$. Berechne $\mathbb{P}[S_\tau = -a]$ und $\mathbb{P}[S_\tau = b]$ und $\mathbb{E}[\tau]$.
Hinweis: Die Martingale vom 2. Aufgabenblatt sind nützlich.

Aufgabe 2 - Eine andere Version des Stoppsatzes (7,5 Punkte)

a) Sei $(X_n)_n$ ein Martingal mit beschränkten Inkrementen, das heißt es gilt $|X_{n+1} - X_n| \leq C$ fast sicher für alle n. Sei τ eine Stoppzeit mit $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. Zeige, dass dann gilt $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$

b) Seien ξ_i i.i.d. mit $\mathbb{P}[\xi_i = 1] = \mathbb{P}[\xi_i = -1] = \frac{1}{2}$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ (gewöhnlicher Random Walk) und $\tau = \inf\{n \colon S_n = 1\}$. Zeige, dass $\mathbb{E}[\tau] = \infty$.

Aufgabe 3 - Rückrichtung des Stoppsatzes (7,5 Punkte)

Sei $(X_n)_n$ ein adaptierter stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ für alle n. Zeige, dass X_n ein Martingal ist, falls für alle beschränkten Stoppzeiten τ gilt $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Aufgabe 4 - Satz von Rademacher (15 Punkte)

In dieser Aufgabe wird durch einen stochastischen Ansatz gezeigt, dass jede Lipschitz-Funktion auf $[0,1]$ *Stammfunktion einer messbaren beschränkten Funktion ist.* $(C^{0,1}[0,1] = H^{1,\infty}[0,1])$

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz–Funktion mit Lipschitz–Konstante L. Betrachte eine uniform auf $[0,1]$ verteilte Zufallsvariable X. Setze für $n \geq 1$:

$$X_n = 2^{-n} \lfloor 2^n X \rfloor \qquad \text{und} \qquad Z_n = 2^n (f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)),$$

wobei $\lfloor X \rfloor$ den ganzzahligen Anteil bezeichnet (Gauß-Klammer).

a) Zeige die folgenden Eigenschaften

$$\sigma(X_0, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X).$$

b) Berechne $\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n]$, wobei $\mathcal{F}_n := \sigma(X_n)$. Folgere, dass (Z_n) ein beschränktes $\mathcal{F}_n$– Martingal ist.

c) Zeige, dass Z_n fast sicher gegen eine Grenz–Zufallsvariable Z konvergiert und dass gilt $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Z_n]$. Zeige, dass es eine messbare Funktion $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $Z = g(X)$.

d) Zeige, dass fast sicher gilt

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) du.$$

e) Schlussfolgere, dass für alle $x \in [0,1]$ gilt $f(x) = f(0) + \int_0^x g(s) ds$.