Institut für angewandte Mathematik
Universität Bonn
Prof. Dr. K.-Th. Sturm
Hendrik Weber
http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~sturm/vorlesungSS08/

Übungen zur Vorlesung Stochastische Prozesse

2. Aufgabenblatt vom 18.4.2008

Aufgabe 1 – Bedingte Wahrscheinlichkeiten (10 Punkte)

Seien X_1 und X_2 unabhängige exponentiell verteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ_1 bzw. λ_2 und sei $T = X_1 + X_2$. Berechne für messbare $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ die bedingte Erwartung $\mathbb{E}\big[h(X_1)\big|T\big]$. Gib eine reguläre Version der bedingten Verteilung von X_1 gegeben T an.

Aufgabe 2 – Rechnung mit Verteilungen (10 Punkte)

a) Die Gamma–Verteilung $\Gamma_{n,\lambda}$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Dichte $\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y}$ bezüglich des Lebesgue Maßes. Sei Y eine Gamma–verteilte Zufallsvariable mit Parametern $(2, \lambda)$. Sei X eine Zufallsvariable, die bedingt auf Y uniform auf $[0, Y]$ verteilt ist. Zeige, dass X und $Y - X$ unabhängige, exponentiell verteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ sind.

b) Die Dirichlet–Verteilung mit Parameteren $\theta_1, \ldots, \theta_n$ ist ein Wahrscheinlichkeitsveteilung auf dem $n-1$ dimensionalen Simplex $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ : \quad \sum_i x_i = 1\}$, die gegeben ist durch

$$\mathrm{Dir}_{\theta_1,\ldots,\theta_n}(A) = \int \mathbf{1}_A(x_1, \ldots, x_n) \frac{\Gamma(\theta_1 + \ldots + \theta_n)}{\Gamma(\theta_1) \ldots \Gamma(\theta_n)} x_1^{\theta_1 - 1} \ldots x_n^{\theta_n - 1} dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Sei nun $\Theta = \theta_1 + \ldots \theta_n$. Sei $X \sim \mathrm{Dir}_{\theta_1,\ldots,\theta_n}$ und $Y \sim \Gamma_{\Theta,1}$ unabhängig. Zeige, dass die Zufallsvariablen $S_i = X_i Y$ unabhängig sind und $S_i \sim \Gamma_{\theta_i,1}$.

Bemerkung: Die Beobachtung in Teil a) spielt eine große Rolle bei der Beschreibung des Poissonprozesses. Die Verteilung in Teil b) ist zum Beispiel in vielen Populationsmodellen wichtig.

Aufgabe 3 – Martingaldefinition (10 Punkte)

Konstruiere ein Martingal X_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ mit

$$E[X_n] = 0 \text{ für alle } n, \qquad \text{aber} \qquad X_n \to -\infty \ \mathbb{P}\text{–f.s.}$$

Aufgabe 4 – Martingale des random walk (10 Punkte)

Seien ξ_i i.i.d. mit $\mathbb{P}[\xi_i = +1] = p$ und $\mathbb{P}[\xi_i = -1] = q = 1 - p$. Sei $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ (random walk mit drift).

a) Ist S_n ein Sub- oder Supermartingale? Wann ist es ein Martingal? .

b) Zeige, dass die folgenden Prozesse Martingale sind

$$X_n = S_n + n(q - p) \qquad Y_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \quad \text{und} \quad Z_n = X_n^2 - n.$$