Institut für angewandte Mathematik
Universität Bonn
Prof. Dr. K.-Th. Sturm
Hendrik Weber
http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~sturm/vorlesungSS08/

Übungen zur Vorlesung Stochastische Prozesse

12. Aufgabenblatt vom 4.7.2008

Ziel dieses Blattes ist es eine alternative Konstruktion der Brownschen Bewegung auf $[0,1]$ *anzugeben, die völlig unabhängig von den Resultaten der Vorlesung ist.*

Aufgabe 1 – Die Haarfunktionen

Definiere die *Haar-Funktionen* $H_k^{(n)}: [0,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt: Für $n \geq 0$ sei $I(n)$ die Menge der ungeraden ganzen Zahlen zwischen 0 und 2^n, also $I(0) = \{1\}$, $I(1) = \{1\}$, $I(2) = \{1,3\}$ und so weiter. Setze dann $H_0^{(0)}(t) = 1$ und für $n \geq 1$ und $k \in I(n)$

$$H_k^{(n)}(t) = \begin{cases} 2^{(n-1)/2} & \text{falls} \quad \frac{k-1}{2^n} \leq t < \frac{k}{2^n} \\ -2^{(n-1)/2} & \text{falls} \quad \frac{k}{2^n} \leq t < \frac{k+1}{2^n} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, dass die Familie der Haarfunktionen $\{H_k^{(n)}, n \geq 0, k \in I(n)\}$ ein orthonormales System in $L^2[0,1]$ bilden, das heißt dass gilt

$$\int_0^1 H_{k_1}^{(n_1)}(t) H_{k_2}^{(n_2)}(t) dt = \delta_{k_1,k_2} \delta_{n_1,n_2}.$$

b) Zeige, dass alle Funktionen der Form

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_k \mathbf{1}_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)[}(t)$$

mit $\xi_i \in \mathbb{R}$ sich als Linearkombinationen der $H_k^{(n)}$ darstellen lassen.

c) Folgere, dass die Familie $\{H_k^{(n)}, n \geq 0, \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1\}$ eine Schauder-Basis von $L^2[0,1]$ ist. (Es bleibt hierfür nur zu zeigen, dass die $H_k^{(n)}$ einen dichten Teilraum aufspannen). Insbesondere gilt also die Parsevalidentität

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} \Big(\int_0^1 f(t) H_k^{(n)}(t) dt \Big) \Big(\int_0^1 g(t) H_k^{(n)}(t) dt \Big).$$

Aufgabe 2 - Direkte Konstruktion der Brownschen Bewegung I (10 Punkte)

Definiere die Schauder-Funktionen durch:

$$S_k^{(n)}(t) = \int_0^t H_k^{(n)}(s) ds.$$

Seien $\xi_k^{(n)}$ unabhängige identisch nach $\mathcal{N}(0,1)$ verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definiere

$$X_t^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k \in I(i)} \xi_k^{(i)} S_k^{(i)}(t).$$

a) Zeige, dass für eine nach $\mathcal{N}(0,1)$ verteilte Zufallsvariable ξ und für alle $x > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[\xi \geq x] \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x},$$

und folgere für alle $n \geq 1$

$$\mathbb{P}[\sup_{k \in I(n)} |\xi_k^{(n)}| \geq n] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^{n-1} e^{-n^2/2}}{n}.$$

b) Folgere mit dem Lemma von Borel-Cantelli, das es für $\mathbb{P}$-fast alle ω einen zufälligen stetigen Pfad $(X_t(\omega), 0 \leq t \leq 1)$ gibt, so dass

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |X_t^{(n)}(\omega) - X_t(\omega)| \to 0.$$

Aufgabe 3 - Direkte Konstruktion der Brownschen Bewegung II (10 Punkte)

Es gelten die Bezeichnungen aus Aufgabe 1 und 2.

a) Zeige: $(X_t)_{t \geq 0}$ ist zentrierter Gaußprozeß.

b) Zeige: $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = s \wedge t$. Verwende dazu die Parseval-Gleichung mit den Funktionen $f = \mathbf{1}_{[0,s]}$ und $g = \mathbf{1}_{[0,t]}$.

X_t ist also eine Brownsche Bewegung.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Schöne Semesterferien!