Institut für angewandte Mathematik
Universität Bonn
Prof. Dr. K.-Th. Sturm
Hendrik Weber
http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~sturm/vorlesungSS08/

# Übungen zur Vorlesung Stochastische Prozesse

## 11. Aufgabenblatt vom 27.6.2008

**Aufgabe 1 - Subordination** (10 Punkte)

Seien $(\mu_t, t \geq 0)$ und $(\nu_t, t \geq 0)$ zwei stetige Faltungshalbgruppen von Maßen auf $\mathbb{R}$. Nehme an, dass für alle $t \geq 0$ gilt $\nu\big((-\infty, 0)\big) = 0$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann durch

$$\lambda_t(A) = \int_0^\infty \mu_s(A)\nu_t(ds)$$

wieder eine stetige Faltungshalbgruppe gegeben ist. Seien $(X_t, t \geq 0)$ und $(Y_t, t \geq 0)$ unabhängige Realisierungen des Lévy-Prozesses zu $(\mu_t)$ bzw. $(\nu_t)$. Zeige dass dann durch den Prozess $(Z_t, t \geq 0)$

$$Z_t = X_{Y_t}$$

eine Realisierung des Lévy-Prozesses zu $(\lambda_t)$ gegeben ist.

**Aufgabe 2 - Resolventen I** (10 Punkte)

Zeige, dass im Fall der Brownschen Halbgruppe

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2t}\Big) dy$$

für alle $p > 0$ der Resolventenoperator $U_p f(x) = \int_0^\infty e^{-pt} P_t f(x) dt$ in folgender Form geschrieben werden kann:

$$U_p f(x) = \int_{\mathbb{R}} u_p(x,y) f(y) dy,$$

mit $u_p(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\Big(-\sqrt{2p}|x-y|\Big)$.

**Aufgabe 3 - Resolventen II** (10 Punkte)

Sei $(P_t)$ eine Fellerhalbgruppe auf $C_0(E)$ und für $p > 0$ sei $U_p$ der Resolventen-Operator. Zeige, dass für $f \in C_0(E)$ gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t U_p f - U_p f}{t} = f + pU_p f \qquad \text{in der } \|.\|_\infty\text{-Norm.}$$

Folgere, dass der Generator $A$ jeder Fellerhalbgruppe dicht definiert ist (das heißt, dass der Definitionsbereich dicht ist). Folgere außerdem, dass für alle $f$ und alle $p > 0$ gilt

$$(A - p)U_p f = f.$$

**Aufgabe 4 - Invariante Maße** (10 Punkte)

Sei $(K_t, t \in \mathbb{R})$ eine zeitlich homogene Markovsche Übergangsfamilie auf $(E, \mathcal{E})$. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu$ heißt *invariantes Maß* für $(K_t, t \in \mathbb{R}_+)$ falls für alle $t$ gilt $K_t\mu = \mu$.

Sei $(K_t, t \in \mathbb{R})$ die Übergangsfamilie des Ornstein - Uhlenbeck Prozesses (Mehler Halbgruppe). Zeige, dass die Normalverteilung $\mathcal{N}(0, a^2)$ für ein passendes $a$ ein invariantes Maß ist und bestimme $a$ in Abhängigkeit von $\sigma$ und $\beta$.