Institut für angewandte Mathematik
Universität Bonn
Prof. Dr. K.-Th. Sturm
Hendrik Weber
http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~sturm/vorlesungSS08/

Übungen zur Vorlesung Stochastische Prozesse

10. Aufgabenblatt vom 20.6.2008

Aufgabe 1 - Alternative Konstruktion des Poisson-Prozesses (10 Punkte)

Fixiere ein $\lambda > 0$. Seien $(T_i, i \geq 1)$ unabhängige $\exp(\lambda)$-verteilte Zuvallsvariablen.

a) Berechne die Verteilung von $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$.

b) Definiere $N_t := \sum_{i=1}^\infty \mathbf{1}_{\{S_i \leq t\}}$. Zeige, dass N_t Poisson-verteilt ist mit Parameter λt.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass N_t eine Realisierung des *Poisson-Prozesses* ist.

Aufgabe 2 - Sprungprozesse II (10 Punkte)

Sei E eine abzählbare Menge, $(K(i,j))_{(i,j)\in E^2}$ eine stochastische Matrix und $(\mu_i)_{i\in E}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E. Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markovkette auf E mit Startverteilung μ und Übergangswahrscheinlichkeiten definiert durch die $K(i,j)$ realisiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$. Sei außerdem $(N_t, t \geq 0)$ ein Poissonprozess mit Parameter $\lambda = 1$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$.

Definiere nun $(X_t, t \geq 0)$ auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)$ durch

$$X_t(\omega_1, \omega_2) = Y_{N_t(\omega_2)}(\omega_1).$$

a) Zeige, dass $(X_t, t \geq 0)$ ein zeithomogener Markovprozess ist.

b) Die Verteilung von X_t ist gegeben als μP_t, wobei

$$P_t = \exp(-t(I-K)) = e^{-t} \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} K^n.$$

Aufgabe 3 - Stabiler Grenzwertsatz (10 Punkte)

Sei $\alpha \in (0,2)$. Die α-stabile Verteilung ν_t^α auf $\mathbb{R}$ ist die Verteilung mit charakteristischer Funktion

$$\hat{\nu}_t^\alpha(x) = \exp(-t|x|^\alpha).$$

a) Zeige, dass durch $(\nu_t^\alpha, t \geq 0)$ eine stetige Faltungshalbgruppe definiert wird.

b) Zeige folgende Konvergenzaussage: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[X_n \in A] = \mathbb{P}[-X_n \in A]$ und φ die charakteristische Funktion der X_i. Wenn

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\varphi(t)}{t^\alpha} = C,$$

dann konvergiert $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n^{1/\alpha}}$ in Verteilung gegen ν_C^α.

c) Sei nun $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $P(X_i > x) = P(-X_i > x)$ und

$$\forall x \geq 1 \qquad \mathbb{P}\Big(|X_1| > x\Big) = x^{-\alpha}.$$

Zeige, dass für die charakteristische Funktion φ der X_i gilt

$$\varphi(t) = \alpha \int_1^\infty \frac{1-\cos(tx)}{x^{\alpha+1}} dx,$$

und folgere $\lim_{t\to 0} \frac{1-\varphi(t)}{t^\alpha} = C$, für ein passendes C.

Aufgabe 4 - Poissonsche Zufallsmaße (10 Punkte)

Sei $(E, \mathcal{E}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Sei außerdem X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\mu(E)$ und sei (Y_i) eine Folge i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in E unabhängig von X, so dass

$$\mathbb{P}[Y_i \in A] = \frac{\mu(A)}{\mu(E)} \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

Definiere das zufällige Maß N auf E durch

$$N(A) = \sum_{i=1}^{X} \delta_{Y_i}(A) := \sum_{i=1}^{X} \mathbf{1}_A(Y_i).$$

Zeige, dass N folgende Eigenschaften hat

(i) Für alle A ist $N(A)$ Poissonverteilt mit Parameter $\mu(A)$.

(ii) Wenn $A_1, \dots A_n$ paarweise disjunkt sind, dann sind die $N(A_1), \dots, N(A_n)$ unabhängig.

(iii) Wenn $A \cap B = \emptyset$, dann gilt $N(A) + N(B) = N(A \cup B)$ fast sicher.

Bemerkung: Dies ist also eine konkrete Realisierung des *Poissonschen Zufallsmaßes*, dessen Existenz abstrakt schon auf Blatt 6 Aufgabe 1 gezeigt wurde.