Stochastische Analysis II Programmieraufgaben

Hinweis: Alle Programme müssen ausführlich kommentiert werden.

Aufgabe 1

(4 Punkte)

In der Finanzmathematik spielt die Verteilungsfunktion N der Standard-Normalverteilung,

$$N(x) := (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2) dy,$$

eine große Rolle. Zu ihrer Berechnung kann man das folgende *Moro-Verfahren* verwenden:

$$N_M(x) := \begin{cases} 1 - N_M(-x), & \text{falls } x < 0, \\ 0,5 + x(A_0 + (A_1 + A_2x^2)x^2)/(1 + (B_1 + (B_2 + B_3x^2)x^2)x^2), & \text{falls } 0 \leq x \leq 1,87, \\ 1 - [(C_0 + (C_1 + C_2x)x)/(D_0 + (D_1 + (D_2 + D_3x)x)x)]^{16}, & \text{falls } 1,87 < x < 6, \\ 1, & \text{falls } x \geq 6. \end{cases}$$

Hierbei sind

$$\begin{aligned} A_0 &:= 0,398942270991, & A_1 &:= 0,020133760596, & A_2 &:= 0,002946756074, \\ B_1 &:= 0,217134277847, & B_2 &:= 0,018576112465, & B_3 &:= 0,000643163695, \\ C_0 &:= 1,398247031184, & C_1 &:= -0,360040248231, & C_2 &:= 0,022719786588, \\ D_0 &:= 1,460954518699, & D_1 &:= -0,305459640162, & D_2 &:= 0,038611796258, \\ D_3 &:= -0,003787400686. \end{aligned}$$

- Schreiben Sie ein Computer-Programm, das dieses Verfahren implementiert.
- Schreiben Sie ein Computer-Programm, das N mit einem numerischen Verfahren Ihrer Wahl berechnet.
- Vergleichen Sie die beiden Verfahren.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Schreiben Sie ein Computer-Programm zur Berechnung des fairen Preises V einer europäischen Kaufoption mit der Black-Scholes-Formel

$$V = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2),$$

wobei

$$\begin{aligned} S_0 &:= \text{aktueller Kurs des Basiswerts,} \\ K &:= \text{Ausübungspreis = Basispreis,} \\ T &:= \text{Laufzeit (in Jahren),} \\ r &:= \text{Zinssatz,} \\ \sigma &:= \text{Volatilität,} \\ N &:= \text{Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung (siehe Aufgabe 1),} \\ d_1 &:= \frac{\log(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 &:= d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Die *historische Volatilität* ist durch

$$\sigma^2 := \frac{M}{T} \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M \left[\log \left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right) - \bar{S} \right]^2, \quad \bar{S} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \log \left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right)$$

definiert. Hierbei sind $(t_i)_{i=0}^M$ $M+1$ aufeinanderfolgende vergangene Börsentage, S_{t_i} ist der Kurs des Basiswerts am Tag t_i , und T ist die Zeitspanne (in Jahren) vom ersten bis zum letzten dieser Börsentage.

Schreiben Sie ein Computer-Programm zur Berechnung der historischen Volatilität.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Die *implizite Volatilität* ist derjenige Wert von σ , für den man mit der Black-Scholes-Formel genau den Marktpreis der Option als fairen Preis erhält. Um die implizite Volatilität zu berechnen, muss man also die Black-Scholes-Formel nach der Volatilität auflösen. Da es hierfür keine geschlossene Formel gibt, bietet es sich an, für die Berechnung das Newton-Verfahren zu verwenden.

Schreiben Sie ein Computer-Programm zur Berechnung der impliziten Volatilität mit dem Newton-Verfahren. Verwenden Sie dabei die Tatsache, dass die Ableitung $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$ des fairen Preises einer europäischen Kaufoption (gemäß der Black-Scholes-Formel) nach der Volatilität durch $\frac{\partial V}{\partial \sigma} = (2\pi)^{-1/2} S_0 \sqrt{T} \exp(-d_1^2/2)$ gegeben ist.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Testen Sie Ihre Programme mit aktuellen Marktdaten.

Abgabe der Lösungen: per E-Mail an philipowski@wiener.iam.uni-bonn.de, und zwar spätestens am Montag, dem 9. Juli 2007.