Stochastische Analysis II Blatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $h_1, \dots, h_n \in H = L^2(T, \mu)$, $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $F := f(W(h_1), \dots, W(h_n))$. Ferner seien $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ und $u \in \mathbb{L}^{1,2}$. Zeigen Sie: $Fg(\|u\|_H^2) \in \mathbb{D}^{1,2}$, und

$$D_t(Fg(\|u\|_H^2)) = D_t Fg(\|u\|_H^2) + 2Fg'(\|u\|_H^2) \int_T u_s D_t u_s \mu(ds).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine standardisierte eindimensionale Brownsche Bewegung. Berechnen Sie die Chaoszerlegungen der Zufallsvariablen $F_1 := \int_0^1 (t^3 W_t^3 + 2t W_t^2) dW_t$ und $F_2 := \int_0^1 t e^{W_t} dW_t$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $(W_{\tau,t})_{\tau \in [0,1], t \in \mathbb{R}_+}$ ein Brownsches Blatt (siehe Blatt 2, Aufgabe 2). Ferner sei $\mathcal{C}_0([0,1])$ der Raum aller stetigen Funktionen $u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(0) = 0$, versehen mit dem Wiener-Maß $\mathbb{W}$. Wir definieren den $\mathcal{C}_0([0,1])$ -wertigen Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ durch

$$X_t(\tau) := \exp(-t) W_{\tau, \exp(2t)}.$$

Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die zum Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ gehörige kanonische Filtration. Zeigen Sie: Für alle $s \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ und $F \in L^2(\mathcal{C}_0([0,1]), \mathbb{W})$ gilt:

$$E[F(X_{s+t}) | \mathcal{F}_s] = (T_t F)(X_s),$$

wobei

$$(T_t F)(u) := \int_{\mathcal{C}_0([0,1])} F\left(\exp(-t)u + \sqrt{1 - \exp(-2t)} \tilde{u}\right) \mathbb{W}(d\tilde{u}).$$

Abgabe der Lösungen: Mittwoch, 20. Juni 2007, zu Beginn der Übung