Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Dipl.-Math. Robert Philipowski

Sommersemester 2007

Stochastische Analysis II
Blatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Es sei $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, und für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gelte: $F^{(m)} \in L^2(\mathbb{R}, \nu)$, wobei $\nu := N(0,1)$. Zeigen Sie, dass dann in $L^2(\mathbb{R}, \nu)$ gilt:

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} c_m H_m,$$

wobei

$$c_m := \int_{\mathbb{R}} F^{(m)}(x)\nu(dx).$$

b) Es sei $F \in \mathbb{D}^{\infty,2} := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{D}^{k,2}$. Zeigen Sie:

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m),$$

wobei

$$f_m := \frac{1}{m!} E\left[D^m F\right].$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien $p \geq 1$, $F = (F^1, \ldots, F^m)$ ein Zufallsvektor mit Komponenten in $\mathbb{D}^{1,p}$ und $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit beschränkten partiellen Ableitungen. Zeigen Sie, dass dann $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$ gilt, und leiten Sie eine Kettenregel zur Berechnung von $D(\varphi(F))$ her.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $W = (W_t)_{0\leq t\leq 1}$ eine standardisierte eindimensionale Brownsche Bewegung und $M := \sup_{0\leq t\leq 1} W_t$. Zeigen Sie: $M \in \mathbb{D}^{1,2}$, und $D_t M = 1_{[0,T]}(t)$, wobei T der (fast sicher eindeutig bestimmte) Zeitpunkt ist, zu dem der Prozess W sein Maximum annimmt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $h \in L^2(T)$ und $F := \exp(W(h) - \frac{1}{2}\int_T h(t)^2 \mu(dt))$.

a) Berechnen Sie $D^m F$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

b) Berechnen Sie die in der Zerlegung $F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m)$ auftretenden symmetrischen Funktionen f_m.

Abgabe der Lösungen: Mittwoch, 6. Juni 2007, zu Beginn der Übung