Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Dipl.-Math. Robert Philipowski

Sommersemester 2007

Stochastische Analysis II
Blatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien X und Y Banachräume. Ein Operator $T \in L(X,Y)$ heißt *nuklear*, falls es Folgen $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in X^* und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y mit $\sum_{n=1}^\infty \|x_n^*\|\|y_n\| < \infty$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$Tx = \sum_{n=1}^\infty x_n^*(x) y_n.$$

Die Menge aller nuklearen Operatoren von X nach Y bezeichnen wir mit $L_1(X,Y)$. Für $T \in L_1(X,Y)$ heißt

$$\|T\|_{L_1} := \inf\left\{ \sum_{n=1}^\infty \|x_n^*\|\|y_n\| \,\middle|\, Tx = \sum_{n=1}^\infty x_n^*(x) y_n \right\}$$

die *nukleare Norm* von T.

a) Zeigen Sie: $(L_1(X,Y), \|\cdot\|_{L_1})$ ist ein Banachraum.

b) Es seien W und Z weitere Banachräume, $R \in L(W,X)$, $S \in L_1(X,Y)$ und $T \in L(Y,Z)$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $TSR \in L_1(W,Z)$, und $\|TSR\|_{L_1} \leq \|T\|\|S\|_{L_1}\|R\|$. ($\|\cdot\|$ bezeichne die Operatornorm.)

c) Es seien H ein Hilbertraum, $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H und $T \in L_1(H) := L_1(H,H)$. Zeigen Sie: Die Reihe

$$\operatorname{Spur}(T) := \sum_{j=1}^\infty \langle e_j, Te_j \rangle$$

konvergiert absolut, ihr Wert ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis, und es gilt

$$|\operatorname{Spur}(T)| \leq \|T\|_{L_1}.$$

d) Zeigen Sie: Ein selbstadjungierter und positiv semidefiniter Operator $T \in L(H)$ ist genau dann nuklear, wenn seine Spur endlich ist. Zeigen Sie ferner, dass in diesem Fall gilt: $\operatorname{Spur}(T) = \|T\|_{L_1}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien $(W_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung, $\sigma \in \mathbb{R}^{n\times d}$ eine feste Matrix und $\rho : (-1,1]^n \times (-1,1]^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte messbare Funktion.

a) Wir betrachten für jedes $N \in \mathbb{N}$ das folgende System stochastischer Differentialgleichungen auf $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} dX_t^i &= \sigma dW_t + \frac{1}{(2N)^n} \sum_{j\in T^N} X_t^j \rho(i,j) dt, \qquad i \in T_N \\ X_0^i &= i, \end{aligned}$$

wobei $T_N := \left(\frac{1}{N}\mathbb{Z} \cap (-1,1]\right)^n$. Zeigen Sie, dass dieses System genau eine Lösung besitzt.

b) Wir lassen jetzt N gegen ∞ gehen und betrachten das System

$$\begin{aligned} dX_t^x &= \sigma dW_t + \left[\int_{T_\infty} X_t^y \rho(x,y)dy\right] dt, \qquad x \in T_\infty \\ X_0^x &= x, \end{aligned}$$

wobei $T_\infty := (-1,1]^n$. Schreiben Sie dieses System als stochastische Differentialgleichung in einem geeigneten Hilbertraum und untersuchen Sie diese auf Existenz und Eindeutigkeit.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien X und Y zwei reelle Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung ein Gauß-Maß sei. Ferner sei H_n das n-te Hermite-Polynom. Zeigen Sie: Falls $E(X) = E(Y) = 0$ und $E(X^2) = E(Y^2) = 1$, so gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$:

$$E\left(H_n(X)H_m(Y)\right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq m \\ \frac{1}{n!}E(XY)^n, & \text{falls } n = m. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Auf dem Raum $L^2(\mathbb{R}, N(0,1))$ sei der Operator D gegeben durch $Du := u'$.

a) Bestimmen Sie D^* und zeigen Sie, dass für $A := -D^*D$ gilt: $(Au)(x) = u''(x) - xu'(x)$. ($A$ heißt *Ornstein-Uhlenbeck-Operator*.)

b) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $DH_n = H_{n-1}$, $D^*H_n = (n+1)H_{n+1}$ und $AH_n = -nH_n$. (Daher tragen D, D^* und A die Namen *Vernichtungs-*, *Erzeugungs-* und *Anzahl-Operator*.)

c) Zeigen Sie, dass die Funktionen $(\sqrt{n!}H_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R}, N(0,1))$ bilden.

d) Zeigen Sie die Kommutator-Relation $DD^* - D^*D = \mathrm{Id}$.

Abgabe der Lösungen: Mittwoch, 23. Mai 2007, zu Beginn der Übung