Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Dipl.-Math. Robert Philipowski

Sommersemester 2007

Stochastische Analysis II
Blatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten in $\mathbb{R}^n$ die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} d\gamma_t^x &= bdt + \sigma dB_t \\ \gamma_0^x &= x \end{aligned}$$

mit $b \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^{n\times d}$ und einer d-dimensionalen Brownschen Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$.

a) Zeigen Sie, dass $(S_t u)(x) := E\left[u(\gamma_t^x)\right]$ eine Halbgruppe $(S_t)_{t\geq 0}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert.

b) Berechnen Sie den Erzeuger A dieser Halbgruppe.

c) Es seien $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Q-Wiener-Prozess auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ (mit $\mathrm{Spur}(Q) < \infty$) und ξ eine $\mathcal{F}_0$-messbare $L^2(\mathbb{R}^n)$-wertige Zufallsvariable. Zeigen Sie: Die stochastische partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX_t &= AX_t dt + dW_t \\ X_0 &= \xi \end{aligned}$$

besitzt genau eine schwache Lösung in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

d) Geben Sie diese Lösung in möglichst expliziter Form an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten in $\mathbb{R}^n$ die *stochastische verzögerte Gleichung*

$$\begin{aligned} dz_t &= \left[\int_{-r}^0 a(d\theta) z_{t+\theta}\right] dt + f_t dt + dW_t \\ z_0 &= h_0 \\ z_\theta &= h_1(\theta) \quad \text{für } \theta \in [-r,0]. \end{aligned}$$

Hierbei seien $r > 0$ die maximale Verzögerung, a ein $\mathbb{R}^{n\times n}$-wertiges endliches Maß auf $[-r,0]$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ lokal integrierbar, $h_0 \in \mathbb{R}^n$, $h_1 \in L^2([-r,0],\mathbb{R}^n)$ und $(W_t)_{t\geq 0}$ eine n-dimensionale Brownsche Bewegung.

a) Begründen Sie, dass diese Gleichung zu der folgenden stochastischen Differentialgleichung auf dem Hilbertraum $H := \mathbb{R}^n \oplus L^2([-r,0],\mathbb{R}^n)$ äquivalent ist:

$$\begin{aligned} &dX_t = AX_t + Bf_t dt + BdW_t \\ &X_0 = (h_0, h_1) \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $A(h_0,h_1) = (\int_{-r}^0 a(d\theta)h_1(\theta), \frac{dh_1}{d\theta})$ und $Bf := (f,0)$.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) genau eine schwache Lösung in H besitzt. (Verwenden Sie ohne Beweis, dass A eine stark stetige Halbgruppe $(S_t)_{t\geq 0}$ auf H erzeugt.)

c) Berechnen Sie die Lösung in dem Spezialfall $a = a_0\delta_0 + a_1\delta_{-r}$ (wobei $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die (deterministische) *Plattengleichung* mit Nullrandwerten auf einer offenen und beschränkten Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\Delta^2 y \quad \text{in } D \\ y = \Delta y &= 0 \qquad \text{auf } \partial D. \end{aligned}$$

Entwickeln Sie analog zu Aufgabe 3 auf Blatt 5 eine Theorie der stochastischen Plattengleichung.

Abgabe der Lösungen: Mittwoch, 16. Mai 2007, zu Beginn der Übung