

Stochastische Analysis II Blatt 4

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Wir betrachten den negativen inversen Laplace-Operator $-\Delta^{-1}$ mit Null-Randbedingung auf einer offenen und beschränkten Menge $D \subset \mathbb{R}^d$. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass $-\Delta^{-1}$ ein kompakter linearer Operator auf dem Raum $L^2(D)$ ist.

- Zeigen Sie, dass $-\Delta^{-1}$ selbstadjungiert und positiv definit ist.
- Es sei jetzt $D := (0, R)^d$ für ein $R > 0$. Berechnen Sie in diesem Fall die Eigenwerte und damit die Spur des negativen inversen Laplace-Operators. Ermitteln Sie insbesondere, wann $-\Delta^{-1}$ ein Spurklasse-Operator ist. Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass die Funktionen $e_{(k_1, \dots, k_d)}(x) := (2/R)^{d/2} \prod_{i=1}^d \sin(\frac{k_i \pi}{R} x_i)$, $(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$, eine Orthonormalbasis von $L^2((0, R)^d)$ bilden.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Es seien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum, $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H und $X \in \mathcal{M}^2([0, T], H)$. Für $u, w \in H$ und $t \in [0, T]$ sei

$$V_t^{u,w} := \sum_{k,l=1}^{\infty} \ll X^k, X^l \gg_t \langle u, e_k \rangle \langle w, e_l \rangle,$$

wobei $X_t^k := \langle X_t, e_k \rangle$. Zeigen Sie:

- Die obige Reihe konvergiert fast sicher und definiert einen stetigen Prozess mit endlicher Variation.
- Der Prozess $M_t^{u,w} := \langle X_t, u \rangle \langle X_t, w \rangle - V_t^{u,w}$ ist ein stetiges Martingal.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Es seien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum und $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H . Wir betrachten eine auf der Menge $\{ke_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ konzentrierte H -wertige Zufallsvariable X mit $P[X = ke_k] = C \frac{1}{k^2}$, wobei $C := (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2})^{-1}$. Zeigen Sie: X ist nicht integrierbar, aber für jedes $v \in H$ gilt $E[\langle X, v \rangle^2] < \infty$.

Abgabe der Lösungen: Mittwoch, 2. Mai 2007, zu Beginn der Übung