Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Dipl.-Math. Robert Philipowski

Sommersemester 2007

Stochastische Analysis II
Blatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung, $a, b \in \mathbb{R}$ und $T > 0$. Wir betrachten die folgende eindimensionale stochastische Differentialgleichung auf dem Intervall $[0, T)$:

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{b - X_t}{T - t} dt + dW_t \\ X_0 &= a. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Lösung dieser Gleichung durch

$$X_t = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T - t)\int_0^t \frac{1}{T - s}\, dW_s$$

gegeben ist.

b) Wir setzen jetzt noch $X_T := b$. (Bisher war X_t nur für $t < T$ definiert.) Zeigen Sie: Der Prozess $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ ist eine Brownsche Brücke von $(0, a)$ nach (T, b).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien $0 = t_0 < \ldots < t_n < T$, $x_0 := a$ und $p_t(x) := (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{x^2}{2t})$. Zeigen Sie, dass die endlichdimensionalen Verteilungen der Brownschen Brücke $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ von $(0, a)$ nach (T, b) durch

$$P[X_{t_1} \in dx_1, \ldots, X_{t_n} \in dx_n] = \prod_{i=1}^{n} p_{t_i - t_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) \frac{p_{T-t_n}(b - x_n)}{p_T(b - a)} dx_1 \ldots dx_n$$

gegeben sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Auf dem Raum $\mathcal{C}([0, T])$ seien $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ der kanonische Prozess, $\mathbb{P}^a$ die Verteilung der in a startenden Brownschen Bewegung und $\mathbb{P}^{a,b}$ die Verteilung der Brownschen Brücke von $(0, a)$ nach (T, b). Zeigen Sie, dass für Lebesgue-fast alle $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{P}^{a,b}(\cdot) = \mathbb{P}^a(\,\cdot \mid X_T = b).$$

(Dies ist die exakte Fassung der folgenden Aussage: *Die Brownsche Brücke von $(0, a)$ nach (T, b) ist eine in a startende Brownsche Bewegung, die dazu gezwungen wird, zur Zeit T den Punkt b zu erreichen.*)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}^d$ und $T > 0$. Unter einer *d-dimensionalen Brownschen Brücke* von $(0, a)$ nach (T, b) versteht man einen $\mathbb{R}^d$-wertigen Gauß-Prozess $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ mit $E(X_t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) a + \frac{t}{T} b$, $\mathrm{Cov}(X_s^{(i)}, X_t^{(j)}) = \delta_{ij}[(s \wedge t) - st/T]$ und fast sicher stetigen Pfaden.

a) Zeigen Sie: Ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ ist genau dann eine d-dimensionale Brownsche Brücke von $(0, a)$ nach (T, b), wenn seine Komponenten $(X_t^{(i)})_{0\leq t\leq T}$, $i = 1, \ldots, d$, unabhängige eindimensionale Brownsche Brücken von a_i nach b_i sind.

b) Zeigen Sie: Wenn der Prozess $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ eine d-dimensionale Brownsche Brücke von $(0, a)$ nach (T, b) ist, so ist der Prozess $(X_{T-t})_{0\leq t\leq T}$ eine d-dimensionale Brownsche Brücke von $(0, b)$ nach (T, a).

Abgabe der Lösungen: Mittwoch, 25. April 2007, in der Übung