Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Dipl.-Math. Robert Philipowski

Sommersemester 2007

Stochastische Analysis II
Blatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $(E, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum und $I := L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$. Für $u, v \in I$ setzen wir

$$\Gamma(u, v) := \int_E u(t)v(t)\mu(dt).$$

a) Zeigen Sie, dass Γ positiv semidefinit ist.

b) Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung. Für $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$ setzen wir $Y_u := \int_0^\infty u(t)dB_t$. Zeigen Sie: Der Prozess $(Y_u)_{u\in L^2(\mathbb{R}_+)}$ ist ein zentrierter Gauß-Prozess mit $\mathrm{Cov}(Y_u, Y_v) = \int_0^\infty u(t)v(t)dt$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $I := \mathbb{R}_+^2$. Für $(\sigma, s), (\tau, t) \in I$ setzen wir

$$\Gamma((\sigma, s), (\tau, t)) := (\sigma \wedge \tau) \cdot (s \wedge t).$$

a) Zeigen Sie, dass Γ positiv semidefinit ist. Es gibt also einen reellen Gauß-Prozess $(Y_{(\tau,t)})_{(\tau,t)\in\mathbb{R}_+^2}$ mit $E(Y_{(\tau,t)}) = 0$ und $\mathrm{Cov}(Y_{(\sigma,s)}, Y_{(\tau,t)}) = (\sigma \wedge \tau) \cdot (s \wedge t)$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der mehrdimensionalen Variante des Stetigkeitssatzes von Kolmogorov und Chentsov, dass dieser Prozess eine stetige Version besitzt. Diese heißt *Brownsches Blatt*.

c) Was kann man bei festgehaltenem $\tau \geq 0$ über den Prozess $(Y_{(\tau,t)})_{t\geq 0}$ sagen?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für keine Version $(X_t)_{t\geq 0}$ des Weißen Rauschens (mit Indexmenge $\mathbb{R}_+$) die Abbildung $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ messbar ist. Hinweis: Führen Sie die Annahme der Messbarkeit wie folgt zum Widerspruch: Zeigen Sie zunächst, dass für jedes Intervall $I \subseteq [0, 1]$ gilt: $E((\int_I X_t dt)^2) = 0$. Berechnen Sie sodann $E(\int_0^1 X_t^2 dt)$ auf zwei verschiedene Arten.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $(B_t)_{t\geq 0}$ eine standardisierte eindimensionale Brownsche Bewegung und $\alpha, \beta > 0$. Wir setzen $Y_t := \exp(-\alpha t)B_{\beta \exp(2\alpha t)}$. Zeigen Sie: Der Prozess $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ist ein zentrierter stationärer Gauß-Prozess mit $\mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) = \beta \exp(-\alpha|s - t|)$ und fast sicher stetigen Pfaden. Dieser Prozess heißt *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess*.

Abgabe der Lösungen: Mittwoch, 18. April 2007, in der Übung