Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Dipl.-Math. Robert Philipowski

Sommersemester 2007

Stochastische Analysis II
Blatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei L der Ornstein-Uhlenbeck-Operator zu $H = L^2([0,1], dx)$, also der negative Generator der in Aufgabe 3 auf Blatt 9 definierten Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$. Zeigen Sie:

$$\langle F, LF\rangle_{(L^2(\mathcal{C}_0([0,1]),\mathbb{W})} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\int_{\mathcal{C}_0([0,1])}\int_{\mathcal{C}_0([0,1])}\left[F\left(\cos(r)u+\sin(r)v\right)-F(u)\right]^2\mathbb{W}(du)\mathbb{W}(dv).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei L der Ornstein-Uhlenbeck-Operator zu einem allgemeinen Hilbert-Raum $H = L^2(T,\mu)$. Ferner seien die Operatoren Γ und Γ_2 durch $\Gamma(F,G) := \int_T D_tFD_tG\mu(dt)$ und $\Gamma_2(F) := \Gamma(LF,F) - \frac{1}{2}L\Gamma(F,F)$ definiert. Zeigen Sie:

$$\Gamma_2(F) = \int_T (D_tF)^2\mu(dt) + \int_T\int_T (D_sD_tF)^2\mu(ds)\mu(dt).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $b, \sigma \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$ und $(X_t^x)_{t\geq 0}$ die starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX_t^x &= b(X_t^x)dt + \sigma(X_t^x)dW_t \\ X_0^x &= x. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\frac{\partial X_t^x}{\partial x} = \exp\left(\int_0^t \sigma'(X_s^x)dW_s + \int_0^t\left[b'(X_s^x) - \frac{1}{2}\sigma'(X_s^x)^2\right]ds\right).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $A_0, A_1, \ldots, A_d$ glatte Vektorfelder auf $\mathbb{R}^m$. Wir betrachten die Stratonovich-Differentialgleichung

$$dX_t = A_0(X_t)dt + \sum_{j=1}^d A_j(X_t)\circ dW_t^j.$$

a) Schreiben Sie die obige Gleichung als Itô-Gleichung.

b) Zeigen Sie, dass für den Generator L gilt:

$$L = A_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d A_j^2.$$

c) Berechnen Sie L in dem Spezialfall $d = 2$, $m = 3$, $A_0 = 0$, $A_1 = (1, 0, -y/2)$, $A_2 = (0, 1, x/2)$.

d) Untersuchen Sie, ob in diesem Spezialfall die Hörmander-Bedingung erfüllt ist.

Abgabe der Lösungen: Mittwoch, 27. Juni 2007, zu Beginn der Übung