SS 2004 **Blatt 9** 1.7.2004

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis II

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = (2 - xy)xye^{-xy} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Zeige:

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x,y)dy \right) dx \neq \int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy$$

Aufgabe 2. Man zeige, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + uy + \cos(v) = 0$$
$$2x + u^2 - uv = 5$$

in einer Umgebung des Punktes $(2,5)$ durch eine C^1-Abbildung

$$\psi : (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

mit $u(2,5) = -1$, $v(2,5) = 0$ aufgelöst werden kann. Berechne ferner die Ableitung von ψ im Punkt $(2,5)$.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,\lambda) = \tfrac{e^{-\lambda(1+x^2)}}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_+$$

Setze $F(\lambda) := \int_0^\infty f(x,\lambda)dx$ sowie $G(R) := \int_0^R e^{-x^2}dx$ für $\lambda, R \geq 0$.

i) Zeige: Für alle $R, \epsilon > 0$ gilt

$$F(R) - F(\epsilon) = \int_\epsilon^R F'(\lambda)d\lambda = -2(G(\sqrt{R}) - G(\sqrt{\epsilon})) \lim_{R\to\infty} G(R)$$

ii) Folgere aus i):

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{R\to\infty} G(R) = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$$

Aufgabe 4. Zeige, dass die durch

$$F(t) := \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos(xt)dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und der Differentialgleichung $2F'(t) + tF(t) = 0$ genügt. Folgere daraus $F(t) = \sqrt{\pi}\exp(-t^2/4)$. (Hinweis: $F(0) = \sqrt{\pi}$, vgl. Aufgabe 3)