SS 2004 **Blatt 8** 24.6.2004

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis II

Aufgabe 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt. Zeige, dass für jedes $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ gilt:

$$\triangle_h f \xrightarrow{h \searrow 0} \triangle f \quad \text{gleichmäßig auf } K,$$

wobei $\triangle_h$ ("diskreter Laplace-Operator" zum Parameter $h > 0$) durch

$$(\triangle_h f)(x) = \frac{1}{h^2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} [f(x+he_i)+f(x-he_i)]\right) - 2nf(x)\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

gegeben sei. Hierbei ist mit $(e_i)_{i\le n}$ die Standard-Basis von $\mathbb{R}^n$ gemeint.

Aufgabe 2. Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig und sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(y,t) = \int u(x) \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\tfrac{(x-y)^2}{2t})\, dx \quad \text{für } y \in \mathbb{R}, t > 0.$$

i) Zeige: f genügt der Wärmeleitungsgleichung, d.h. es gilt

$$(\tfrac{\partial}{\partial t} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{\partial y^2}) f(y,t) = 0$$

ii) Zeige: $\lim_{t\searrow 0} f(y,t) = u(y)$ für jedes $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Seien $f, g : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$ und $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ gegeben. Zeige: f hat genau ein globales Maximum unter der Nebenbedingung $g = 1$. Bestimme den zugehörigen Maximierer explizit.

Hinweis: Zeige zunächst, dass f *mindestens* ein globales Maximum unter der Nebenbedingung $g = 1$ besitzt und dass die zugehörige Maximalstelle nicht auf dem Rand von $[0,1]^n$ liegen kann.

Aufgabe 4. Seien $f, g : [1, \infty[\times [1, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = x + 2y, \qquad g(x,y) = x\ln(x) + 2y\ln(y) \quad \forall x, y \in [1, \infty[$$

Zeige: f hat genau ein globales Maximum unter der Nebenbedingung $g = 6\ln(2)$. Bestimme den zugehörigen Maximierer explizit.