Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

# Analysis II

**Aufgabe 1.** Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, und sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

i) Zeige: Ist $A$ offen, so ist $f$ automatisch stetig.

ii) Zeige mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass man nicht folgern kann, dass $f$ stetig ist, wenn man die Voraussetzung in Teil i), dass $A$ offen sei, weglässt.

**Aufgabe 2.** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, konvex und kompakt und sei $f : K \to \mathbb{R}$ eine nicht-konstante stetige konvexe Funktion. Ein Punkt $x_0 \in K$ heißt (globaler) Maximierer genau dann, wenn gilt: $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in K$. Zeige: $f$ besitzt mindestens einen Maximierer, und jeder Maximierer von $f$ liegt auf dem Rand von $K$.

**Aufgabe 3.** Seien $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{R}^n$.

i) Zeige: Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} |x - a_i|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

besitzt genau einen Minimierer $x_0$. Gebe $x_0$ explizit an.

ii) Verallgemeinere das Resultat in Teil i) auf beliebige Funktionen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Form

$$g(x) = \sum_{i=1}^{N} m_i |x - a_i|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wo $m_1, m_2, \ldots, m_N \geq 0$.

**Aufgabe 4.** Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ der *Rayleighquotient*

$$f(x) := \frac{< Ax, x >}{\|x\|^2}$$

Bestimme die kritischen Punkte $x_0$ von $f$ sowie die zugehörigen Werte $f(x_0)$. Welche dieser kritischen Punkte sind Minimierer bzw. Maximierer? Beweis?