SS 2004 **Blatt 6** 7.6.2004

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis II

Aufgabe 1. Zeige: Für alle $x \in]-1,1[$ gilt

$$\arctan(x) = x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} - \tfrac{x^7}{7} \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Hinweis: Entwickle $\frac{1}{1+x^2}$ in eine geometrische Reihe.

Aufgabe 2.

i) Zeige: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\tfrac{x+y}{1-xy}\right)$$

("Funktionalgleichung des Arcus-Tangens")

ii) Folgere aus Teil i) die sogenannte "Machinsche Formel":

$$\tfrac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\tfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\tfrac{1}{239}\right)$$

iii) Berechne π mit Hilfe der Machinschen Formel und Aufgabe 1 mit einer Genauigkeit von 10^{-6}.

Aufgabe 3. Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ *sternförmig*, d.h. es gelte

$$\exists x \in V : \forall y \in V : \quad [[x,y]] := \{t \cdot x + (1-t) \cdot y \mid t \in [0,1]\} \subset V$$

Außerdem sei V offen und $X : V \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld auf V mit $\operatorname{rot} X = 0$. Zeige: Es existiert eine glatte Funktion $U : V \to \mathbb{R}$ mit

$$X = \nabla U$$

Aufgabe 4. i) Sei $g :]-a,a[\to \mathbb{R}$, $a > 0$, fünfmal stetig differenzierbar und *ungerade*, d.h. es gelte $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in]-a,a[$. Zeige:

$$\forall x \in]-a,a[: \exists \xi \in]0,x[: \quad g(x) = \tfrac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \tfrac{x^5}{180} g^{(5)}(\xi)$$

ii) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, fünfmal stetig differenzierbar. Zeige mit Hilfe von Teil i), dass es ein $\xi \in]a,b[$ gibt, so dass

$$f(b) - f(a) = \tfrac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right] - \tfrac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi)$$

gilt ("Simpsonsche Formel")