Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis II

Aufgabe 1. Die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$F((r,\theta,\varphi)) = (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)) \quad \forall r,\theta,\varphi \in \mathbb{R}$$

gegeben. Berechne für alle $(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3$ die Jacobi-Matrix von F im Punkt (r,θ,φ) sowie deren Determinante.

Aufgabe 2.
i) Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, von der Form

$$f((x,t)) = \exp(< x, a > +t\|a\|^2/2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

für festes $a \in \mathbb{R}^n$. Hierbei bezeichne $< \cdot, \cdot >$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass f die sogenannte *Wärmeleitungsgleichung*

$$\left(\tfrac{1}{2}\triangle - \tfrac{\partial}{\partial t}\right) f = 0$$

erfüllt.

ii) Die Abbildungen $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar. Außerdem sei ϕ konvex und es gelte $\triangle u = 0$. Zeige, dass dann $\triangle(\phi \circ u) \geq 0$ gilt.

Aufgabe 3. Die Abbildung $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei durch

$$p(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \quad \forall r,\varphi \in \mathbb{R}$$

gegeben. Zeige: Ist $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$

$$(\triangle u) \circ p = \frac{\partial^2 (u \circ p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial (u \circ p)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (u \circ p)}{\partial \varphi^2}$$

Aufgabe 4. Berechne die totale Ableitung folgender Abbildungen:
i) $\mathrm{Mat}(N,\mathbb{R}) \ni A \mapsto A \cdot A \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{R})$
ii) $\mathrm{Mat}(N,\mathbb{R}) \ni A \mapsto A \cdot A \cdot A \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{R})$

Hierbei ist $\mathrm{Mat}(N,\mathbb{R})$ der Raum der reellen $N \times N$-Matrizen.