SS 2004 **Blatt 4** 13.5.2004

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis II

Aufgabe 1. Zeige: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } x, y \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$$

gegeben ist, ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, ist aber im Punkt $(x,y) = (0,0)$ nicht stetig.

Aufgabe 2. Zeige: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } x, y \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$$

gegeben ist, ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \qquad \text{falls } x, y \neq 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \qquad \text{falls } x = y = 0$$

Ist f zweimal *stetig* partiell differenzierbar?

Aufgabe 3. Sei $F : (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x,t) = \frac{\sin(\|x\| - ct)}{\|x\|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, t \in \mathbb{R}$$

Zeige, dass F die sogenannte Schwingungsgleichung erfüllt:

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)F(x,t) = 0$$

Aufgabe 4. Ein metrischer Raum X heisst *total beschränkt* genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine Überdeckung von X mit endlich vielen offenen Kugeln vom Radius ϵ existiert. Zeige:

i) Jeder kompakte metrische Raum X ist vollständig und total beschränkt.

ii) Jeder metrische Raum X, der vollständig und total beschränkt ist, ist kompakt.

Hinweis für Teil ii): Zeige, dass jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine Teilfolge besitzt, welche eine Cauchy-Folge ist.