

Analysis II

Aufgabe 1. Zeige:

- i) Für jede endliche Folge $(K_i)_{i \leq n}$ kompakter Teilmengen eines metrischen Raumes X ist auch $\bigcup_{i \leq n} K_i$ kompakt.
- ii) Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Aufgabe 2. Sei $O(N) := \{A \in \text{Mat}(N, \mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = 1\}$ der Raum der orthogonalen $N \times N$ -Matrizen. Der Raum $\text{Mat}(N, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{N \times N}$ sei mit der Euklidischen Abstandsfunktion versehen.

- i) Zeige, dass $O(N)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\text{Mat}(N, \mathbb{R})$ ist.
- ii) Zeige, dass $O(N)$ auch eine beschränkte Menge von $\text{Mat}(N, \mathbb{R})$ ist und folgere daraus (sowie aus Teil i)), dass $O(N)$ kompakt ist.

Aufgabe 3. Sei X ein metrischer Raum. Für alle $A, B \subset X$ setzen wir

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$$

- i) Zeige durch ein Beispiel, dass für disjunkte Mengen $A, B \subset X$ die Relation $d(A, B) = 0$ gelten kann, selbst wenn A und B abgeschlossen ist.
- ii) Zeige: Sind $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen und ist zusätzlich eine der beiden Mengen kompakt, so folgt $d(A, B) > 0$

Aufgabe 4. Sei $\|\cdot\|_p : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ für $p > 0$ durch $\|f\|_p = (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{1/p}$ für alle $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ gegeben.

- i) Zeige, dass $\|\cdot\|_p$ für $p \geq 1$ eine Norm auf $C([0, 1], \mathbb{R})$ ist. Wie ist die zu $\|\cdot\|_p$ gehörige Abstandsfunktion $d_{\|\cdot\|_p}$ definiert? Ist $\|\cdot\|_p$ auch eine Norm für $0 < p < 1$?
- ii) Ist der metrische Raum $(C([0, 1], \mathbb{R}), d_{\|\cdot\|_p})$, $p \geq 1$, vollständig?