

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis II

Aufgabe 1. Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

- i) $y'(t) = y(t) \cdot \cos(t)$
- ii) $y'(t) = e^{y(t)} \cdot \sin(t)$

Aufgabe 2.

- i) Wie lautet die Lösung von $y''(t) - a^2y(t) = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$?
- ii) Bestimme die allgemeine Lösung von

$$y'''(t) - 6y''(t) + 11y'(t) - 6y(t) = 0$$

Aufgabe 3. Bestimme die allgemeine Lösung von

$$y'(t) = (y(t) + t)^2$$

Hinweis: Benutze eine geeignete Substitution

Aufgabe 4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $I \times \mathbb{R}$ global einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten $L \in \mathbb{R}_+$ genügt, d. h. es gelte

$$\forall t \in I : \forall x, y \in \mathbb{R} : |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

Zeige: Sind $\phi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen der Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$, so gilt für alle $t, t_0 \in I$:

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq |\phi(t_0) - \psi(t_0)| \cdot \exp^{L|t-t_0|}$$

Hinweis: Benutze Picard-Lindelöf-Iteration