Analysis II

Aufgabe 1. Bekanntlich gilt

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$$

für alle $x \in]-1, 1[$ (vgl. Aufgabe 1 von Blatt 6). Gebe einen ausführlichen Beweis dafür an, dass diese Gleichung sogar für alle $x \in [-1, 1]$ gilt, dass also insbesondere gilt

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

Aufgabe 2. Bestimme die Taylor-Reihe von $\arccos(x)$ um den Punkt $x = 0$ und zeige, dass sie für $|x| < 1$ gegen $\arccos(x)$ konvergiert.

Aufgabe 3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $L : [a, b] \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, Wir sagen, eine C^2 -Funktion $y : [a, b] \rightarrow I$ erfülle die zu L gehörige Euler-Lagrange-Gleichung g.d.w. gilt

$$\forall t \in [a, b] : \quad D_2 L(t, y(t), y'(t)) - \frac{d}{dt} D_3 L(t, y(t), y'(t)) = 0$$

Wir setzen nun außerdem voraus, dass L nicht von der ersten Variablen abhängt und setzen $\bar{L}(q, p) := L(a, q, p)$. Zeige: Jede Lösung $y : [a, b] \rightarrow I$ der zu L gehörigen Euler-Lagrange-Gleichung genügt der sogenannten “Beltrami-Identität”

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall t \in [a, b] : \quad \bar{L}(y(t), y'(t)) - y'(t) \cdot D_2 \bar{L}(y(t), y'(t)) = C$$

Aufgabe 4. Sei $L : [a, b] \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $L(t, q, p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{q}}$ gegeben. Diese Lagrange-Funktion taucht z.B. bei dem sogenannten “Brachistochronen-Problem” auf, bei dem es darum geht, die Form derjenigen Kurve y zwischen zwei festen Punkten $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ zu bestimmen, für die die Zeit minimal wird, die ein sich reibungslos und nur durch die Schwerkraft beschleunigtes Teilchen benötigt, um auf y von P_1 nach P_2 zu gelangen. Sei y eine Lösung der zu L gehörigen Euler-Lagrange-Gleichung mit $y(a) = \epsilon > 0$. Zeige: Es existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit

$$(1) \quad \forall t \in [a, b] : \quad (y'(t))^2 = \frac{K}{y(t)} - 1$$

(Hinweis: Beltrami-Identität benutzen). Zeige, dass $y = f \circ g^{-1}$ mit $f(x) = \frac{K}{2}(1 - \cos(x))$ und $g(x) = \frac{K}{2}(x - \sin(x))$ der Gleichung (1) genügt.

Zusatz-Aufgabe für Mathematiker (ohne Punkte): Untersuche, ob bzw. wann K durch ϵ eindeutig bestimmt ist und ob in diesem Fall y punktweise konvergiert, wenn man ϵ gegen 0 gehen lässt.

Zusatz-Aufgabe für Physiker (ohne Punkte): Wieso ist $L(t, q, p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{q}}$ bis auf eine multiplikative Konstante die korrekte Lagrange-Funktion für das Brachistochronen-Problem?