Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 11/12
Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Matthias Erbar/Christian Ketterer

9. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Fr 16.12.11, 11:00 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Warm up) Sei (B_t) eine eindimensionale Brownsche Bewegung mit Startpunkt 0. Zeige, dass der Prozess $Y_t := \sin(B_t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(B_s)\mathrm{d}s$ ein Martingal ist und berechne $\mathbb{E}Y_t$ und $\mathrm{Var}Y_t$.

2. (Transformationen der Brownschen Bewegung)

a) Sei (B_t) eine d-dimensionale Brownsche Bewegung, die in 0 startet und sei Q eine orthogonale $d \times d$ Matrix. Zeige, dass auch $\tilde{B}_t := QB_t$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung ist.

b) Sei nun (B_t) eine eindimensionale Brownsche Bewegung. Zeige, dass der Prozess

$$X_t \;:=\; \int_0^t \mathrm{sign}(B_t)\mathrm{d}B_t$$

eine Brownsche Bewegung ist.

3. (Mehrdimensionale Itô Formel) Beweise folgende Verallgemeinerung der mehrdimensionalen Itô Formel:
Sei $X = (X^1, \ldots, X^d)$ *mit stetigen Semimartingalen* X^i, $i = 1, \ldots, d$. *Sei* $O \subset \mathbb{R}^d$ *offen und* $F \in C^2(O, \mathbb{R})$. *Weiter sei* $D \subset \mathbb{R}^d$ *offen, so dass* $\overline{D} \subset O$, *und es gelte* $\mathbb{P}(X_t \in \overline{D} \;\; \forall t \geq 0) = 1$. *Dann gilt für alle* t:

$$F(X_t) \;=\; F(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} F(X_s)\mathrm{d}X_s^i + \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(X_s)\mathrm{d}\langle X^i, X^j\rangle_s \;.$$

Hinweis: Man kann wie im Beweis aus der Vorlesung vorgehen und folgende Variante des Approximationssatzes von Weierstraß benutzen:
Für jede Menge $K \subset O$ kompakt existiert eine Folge von Polynomen F_n, so dass gilt: F_n und seine ersten und zweiten Ableitungen konvergieren gegen F und ihre Ableitungen gleichmäßig in K.

4. (Stratonovich Integral) Für stetige Semimartingale X, Y definieren wir das Stratonovich Integral durch (vgl. Aufgabe 1 auf Blatt 8):

$$\int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}X_s \; := \; \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\langle X, Y\rangle_t \; .$$

Zeige folgende Eigenschaften:

a) $\circ\mathrm{d}(XY)_t \;=\; X_t \circ \mathrm{d}Y_t + Y_t \circ \mathrm{d}X_t$ (Produktregel).

b) Für $f \in C^3(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ gilt : $\circ\mathrm{d}f(X)_t \;=\; \nabla f(X_t) \circ \mathrm{d}X_t$ (Kettenregel).