Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 11/12
Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Matthias Erbar/Christian Ketterer

8. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Fr 09.12.11, 11:00 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Itô- und Stratonovich-Integrale)

a) Sei (B_t) eine Brownsche Bewegung. Zeige ausgehend von der Definition des Itô-integrals

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$

b) Das Stratonovich-Integral eines stetigen Prozesses (X_t) bezüglich einer Brownschen Bewegung (B_t) is definiert durch

$$\int_0^t X_s \circ dB_s := \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{t_i \in \Delta_n \setminus t_0} \frac{1}{2}(X_{t_i} + X_{t_{i-1}}) \cdot (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \text{ in } L^2,$$

wobei $\Delta := \{0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = t\}$ eine Zerlung von $[0, t]$ ist.
Zeige:

$$\int_0^t B_s \circ dB_s = \frac{1}{2}B_t^2.$$

Das Itô- und das Stratonovich-Integral stimmen also nicht überein!

2. (Wiener-Integrale) Wir betrachten das stochastische Integral

$$I_t := \int_0^t h(s) dB_s, 0 \leq t \leq 1$$

einer deterministischen Funktion $h \in L^2([0,1], ds)$ bezüglich der Brownschen Bewegung.

a) Verwende eine Approximation des Integrals durch Riemannnsummen, um zu zeigen, dass I_t normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz

$$\tau(t) = \int_0^t h(r)^2 dr$$

b) Zeige allgemeiner, dass die Inkremente $I_t - I_s$ des Prozesses (I_t) über disjunkten Zeitintervalle unabhängig sind mit Verteilung $N(0, \tau(t) - \tau(s))$.

3. (Beispiel) Sei ξ eine beschränkte $\mathcal{F}_\infty$-meßbare ZV auf $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathcal{F}_\infty)$ und (Z_t) eine cádlág-Version von

$$Z_t^0 := \mathbb{E}\left[\xi | \mathcal{F}_t\right].$$

Setze $X_t = \xi$ (unabhängig von t) und $Y_t = \xi - Z_t$. Zeige, dass für alle $M, N \in \mathcal{H}^2$ gilt:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty Y_s d\left\langle M, N\right\rangle_s\right] \; = \; 0 \; .$$

[Hinweis: Approximation durch Riemannsummen]
Folgere hieraus, dass für alle $M \in \mathcal{H}^2$ gilt $Y \bullet M = 0$ und daher $X \bullet M = Z \bullet M$.

4. (Beispiel, Fortsetzung) Sei $Z = (Z_t)$ cádlág, adaptiert und beschränkt.

a) Zeige $(\tilde{Z}_t) := (Z_{t-})$ ist vorhersagbar, wobei $Z_{t-} = \lim_{s \to t, s < t} Z_s \; \forall t$.

b) Zeige $Z \bullet \langle M, N \rangle = \tilde{Z} \bullet \langle M, N \rangle \; \forall M, N \in \mathcal{H}^2$.

c) Folgere $Z \bullet M = \tilde{Z} \bullet M$.

Zusammenfassend folgt aus Aufgabe 3 und Aufgabe 4: Das stochastische Integral $X \bullet M$ mit dem nicht-adaptierten Integranden X erhält man als stochastisches Integral $\tilde{Z} \bullet M$ mit dem vorhersagbaren Integranden $\tilde{Z}$.