Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 11/12
Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Matthias Erbar/Christian Ketterer

7. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Fr 2.12., 10 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Produktregel und Assoziativität für Stieltjes Integrale) Seien $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit endlicher Variation. Wir definieren $(f \bullet g)(t) := \int_0^t f(s)\, \mathrm{d}g(s)$ für $t \geq 0$.

a) Zeige, dass dann für alle $t \geq 0$ gilt :

$$\int_0^t f(s)\, \mathrm{d}g(s) = f(t)g(t) - f(0)g(0) - \int_0^t g(s)\, \mathrm{d}f(s)\ .$$

b) Sei $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Zeige :

$$u \bullet (f \bullet g) \ = \ (uf) \bullet g\ .$$

2. (Substitutionsformel und Kettenregel für Stieltjes Integrale) Sei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktionen mit endlicher Variation und sei $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ stetig und monoton wachsend. Weiter sei $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Wir definieren $f(t) = g(h(t))$ für $t \geq 0$. Zeige :

a) Für alle $0 \leq a < b$ gilt

$$\int_a^b u(h(s))\, \mathrm{d}f(s) \ = \ \int_{h(a)}^{h(b)} u(s)\, \mathrm{d}g(s)\ .$$

b) Sei zusätzlich g stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $t \geq 0$:

$$\int_0^t u(s)\, \mathrm{d}f(s) \ = \ \int_0^t u(s) g'(h(s))\, \mathrm{d}h(s)\ .$$

3. (Stieltjes Integrale) Berechne folgende Integrale :

a) $\int_0^T \sin(x)\, \mathrm{d}\cos(x) + \cos(x)\, \mathrm{d}\sin(x)$,

b) $\int_0^{10} \mathbf{1}_{[1,y]}(x)\, \mathrm{d}|x-2|,\ y > 1$,

c) $\int_0^{10} |x-2|\, \mathrm{d}\mathbf{1}_{[1,y]}(x),\ y > 1$.

4. (Quadratische Variation) Sei (X_t) ein stetiges Semimartingal und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeige :

$$\langle f(X) \rangle_t \ = \ \int_0^t \big(f'(X_s)\big)^2\, \mathrm{d}\langle X \rangle_s\ .$$