Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 11/12
Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Matthias Erbar/Christian Ketterer

6. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Fr 25.11., 10 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (L^p-beschränkte Martingale) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $1 < p < \infty$. Für ein stetiges Martingal $(M_t)_{t\geq 0}$ mit $M_0 = 0$ definieren wir

$$\|M\|^p := \sup_t \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right].$$

Zeige, dass

$$\mathcal{M}^p = \{(M_t) \text{ stetiges Martingal mit } M_0 = 0 \text{ und } \|M\| < \infty\}$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ ein Banachraum ist und die Abbildung

$$j : \mathcal{M}^p \to \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \ , \qquad (M_t) \mapsto M_\infty$$

eine Banachraum-Isometrie.

2. (Cauchy-Schwarz Ungleichung)

(i) Sei $\mathcal{M}_2^c$ die Menge der quadrat-integrierbaren stetigen Martingale. Zeige, dass für $X, Y \in \mathcal{M}_2^c$ und jede Folge $\Delta_n = \{t_0^n, t_1^n, \dots\}$ von Partitionen von $[0, \infty)$ mit Feinheit $\| \Delta_n \| \to 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (X_{t_k^n \wedge t} - X_{t_{k-1}^n \wedge t})(Y_{t_k^n \wedge t} - Y_{t_{k-1}^n \wedge t}) \ \longrightarrow \ \langle X, Y \rangle_t$$

$\mathbb{P}$-stochastisch lokal gleichmäßig in t für $n \to \infty$.

(ii) Zeige, dass für alle $X, Y \in \mathcal{M}_2^c$ gilt: $\langle X, Y \rangle^2 \leq \langle X \rangle \langle Y \rangle$.

3. (Semimartingale) Sei (X_t) ein lokales Martingal und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeige, dass $(f(X_t))$ ein Semimartingal ist.
Hinweis: Schreibe f als Differenz von zwei konvexen Funktionen.

4. (Quadratische Variation) Sei (B_t) eine Brownsche Bewegung und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Definiere $Y_t = f(B_t)$. Zeige, dass für jede Folge $\Delta_n = \{t_0^n, t_1^n, \dots\}$ von Partitionen von $[0, \infty)$ mit Feinheit $\| \Delta_n \| \to 0$ gilt:

$$Q_t^{\Delta_n}(Y) \ := \ \sum_{k=1}^{\infty} |Y_{t_k^n \wedge t} - Y_{t_{k-1}^n \wedge t}|^2 \ \longrightarrow \ \int_0^t (f'(B_s))^2 \mathrm{d}s$$

$\mathbb{P}$-stochastisch lokal gleichmäßig in t für $n \to \infty$.

Ein Hinweis der Fachschaft: Am 22.11. findet die Matheparty im Goldenen Engel statt, Beginn 22h. Karten im VVK 2,5 EUR (21./22.11 Mensa Poppelsdorf) oder AK 4 EUR.