Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 11/12
Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Matthias Erbar/Christian Ketterer

5. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Fr 18.11, 10 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Stoppzeiten und Martingale I) Zeige: Ein rechtsstetiger Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit $E[|X_t|] < \infty$ für alle $t \geq 0$ ist ein Submartingal genau dann, wenn für jedes Paar $S \leq T$ von beschränkten Stoppzeiten gilt :

$$E[X_T] \geq E[X_S].$$

2. (Stoppzeiten und Martingale II) Sei T eine beschränkte Stoppzeit bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, die den üblichen Bedingungen genügt. Definiere $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{T+t}$ für $t \geq 0$. Zeigen, dass $\left(\tilde{\mathcal{F}}_t\right)_{t\geq 0}$ ebenfalls den üblichen Bedingungen genügt.
Zeige außerdem:

(i) Falls (X_t) ein rechtsstetiges Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)$ ist, dann ist auch $\tilde{X}_t := X_{T+t} - X_T$ ein rechtsstetiges Submartingal bezüglich $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$.

(ii) Falls $(\tilde{X}_t)$ ein rechtsstetiges Submartingal bezüglich $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ ist mit $\tilde{X}_0 = 0$ fast sicher, dann ist auch $X_t := \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}$ ein Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)$.

3. (Star Trek) Das Kontrollsystem im Raumschiff Enterprise spielt verrückt. Das einzige, was man noch tun kann, ist eine Entfernung einzustellen. Das Raumschiff legt diese Entfernung in einer zufällig ausgewählten Richtung zurück und hält dann an. Das Ziel ist es, das Sonnensystem zu erreichen – eine Kugel vom Radius r. Nach dem n-ten Sprung befindet sich die Enterprise an der Stelle X_n mit einem Abstand $R_n = |X_n|$ zur Sonne (dem Zentrum des Koordinatensystems). Es gelte $R_0 > r$.

a) Zeige: Für jede Strategie, bei der stets eine Distanz kleiner dem momentanen Abstand gewählt wird, ist $1/R_n$ ein Martingal (– im Allgemeinen ist $1/R_n$ ein Supermartingal).

Hinweis: Benutze die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen :
Gilt $\Delta f = 0$ auf einer Kugel $B \subset \mathbb{R}^d$, dann ist $f(x) = ⨍_{\partial B} f$.

b) Folgere: $\quad P[\text{Enterprise erreicht das Sonnensystem}] \leq r/R_0$.

c) Für jedes $\varepsilon > 0$ kann man eine Strategie wählen, bezüglich der die Wahrscheinlichkeit größer als $(r/R_0) - \varepsilon$ ist. Wie sieht so eine Strategie aus ?

4. (Martingale des Poissonprozesses) Seien T_i für $i \in \mathbb{N}$ unabhängige $\exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen und definiere $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$. Der Poissonprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ ist dann definiert durch

$$N_t \;=\; \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{S_n<t\}} \;.$$

Zeige, dass die folgenden Prozesse Martingale sind :

a) $N_t - \lambda t$,

b) $(N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$.

Hinweis: Zeige zunächst, dass die Inkremente von (N_t) unabhängig und Poisson verteilt sind.