Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 11/12
Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Matthias Erbar/Christian Ketterer

4. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Fr 11.11.11, 11:11 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Doob–Meyer Zerlegung) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung und definiere

$$A_t \;:=\; \frac{1}{2}\int_0^t \exp(B_s)\mathrm{d}s \;.$$

Zeige, dass $M_t = \exp(B_t) - A_t$ ein Martingal ist. Mit anderen Worten: A_t ist der wachsende Prozess in der Doob–Meyer Zerlegung von $\exp(B_t)$.

2. (Austrittszeiten der Brownschen Bewegung) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung. Für $r > 0$ definiere die Stoppzeit $T = \inf\{t > 0 \; : \; B_t \notin (-r, r)\}$. Es soll die Laplace–Transformierte von T berechnet werden.

a) Zeige, dass T f.s. endlich ist. *Hinweis: Borel-Cantelli.*

b) Zeige, dass für $\lambda \in \mathbb{C}$ der Prozess $\exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t)$ ein Martingal ist. Folgere, dass für $\lambda \in \mathbb{R}$ auch folgende Prozesse Martingale sind:

$$M_t^\lambda \;=\; \cosh(\lambda B_t)e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \;, \qquad N_t^\lambda \;=\; \cos(\lambda B_t)e^{\frac{\lambda^2}{2}t} \;.$$

c) Benutze den Stoppsatz, um zu zeigen:

$$\mathbb{E}[\exp(\alpha T)] \;=\; \begin{cases} \cosh(r\sqrt{-2\alpha})^{-1} \;, & \alpha \leq 0 \;, \\ \cos(r\sqrt{2\alpha})^{-1} \;, & 0 \leq \alpha < \frac{\pi^2}{8r^2}, \\ +\infty \;, & \frac{\pi^2}{8r^2} \leq \alpha \;. \end{cases}$$

3. (ABRAKADABRA) Ein Affe tippt einen zufälligen Text auf einer Schreibmaschine, so dass jeder neue Buchstaben unabhängig und gleichverteilt aus dem Alphabet $\{A, B, C, \ldots, Z\}$ gewählt wird. Wie lange dauert es im Mittel, bis der Affe das Wort „ABRAKADABRA" getippt hat ? Sei T die erste Zeit, zu der der Affe dieses Wort produziert hat. Zeige, dass

$$E[T] \;=\; 26^{11} + 26^4 + 26 \;.$$

Warum ist dies größer als die mittlere Zeit zu der der Affe das erste Mal "ABRAKADABRI" getippt hat?

Anleitung: Ein Spieler startet zu jedem der Zeitpunkte $n = 1, 2, \ldots$ eine mehrstufige Wette der folgenden Bauart: Er setzt 1 Euro darauf, dass der n–te Buchstabe ein A ist. Wenn er verliert, beendet er die Wette. Wenn er gewinnt, setzt er die erhaltenen 26 Euro darauf, dass der $(n+1)$–te Buchstabe ein B ist. Wenn er verliert, beendet er die Wette. Wenn er gewinnt, setzt er seinen Gewinn von 26^2 Euro darauf, dass der $(n+2)$–te Buchstabe ein R ist usw.

4. (Wo ist der Zufall ?) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz Funktion, d.h. $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$ für ein $K > 0$ und alle $x, y \in [0,1]$. Sei f_n die Funktion, die durch lineare Interpolation zwischen den Werten von f an Punkten der Form $k2^{-n}$ mit $0 \leq k \leq 2^n$ entsteht. Definiere $M_n = f_n'$.

a) Zeige, dass M_n ein Martingal ist auf einem geeigneten filtrierten W-Raum.

b) Folgere, dass es eine messbare, beschränkte Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in [0,1]$ gilt :

$$f(x) \;=\; f(0) + \int_0^x g(y)\mathrm{d}y \;.$$