Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 10/11
Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Matthias Erbar/Christian Ketterer

3. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Fr 4.11., 10 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Rechtsstetige Filtration). Sei $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration von $(\Omega, \mathcal{F})$. Man konstruiere aus $\mathbb{F}$ eine feinere Filtration $\mathbb{F}_+$ durch

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Zeige:

a) $\mathbb{F}_+$ ist eine Filtration mit $(\mathbb{F}_+)_+ = \mathbb{F}_+$.

b) Eine Zufallsvariable $\tau\colon \Omega \mapsto [0, \infty)$ heißt $\mathbb{F}$-Stoppzeit, falls für alle t gilt $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Zeige, dass die folgenden Implikationen gelten: (i) $\Rightarrow$ (ii) und (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) mit

   (i) τ ist eine $\mathbb{F}$-Stopzeit

   (ii) $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0$

   (iii) τ ist eine $\mathbb{F}_+$-Stopzeit

*c) Zusätzlich sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein an $\mathbb{F}$ adaptierter Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Werten in einem metrischen Raum (S, d). Die Abbildungen $t \mapsto X_t(\omega)$ (auch *Pfade von* X genannt) seien rechtsstetig. Ist $B \subset S$ offen, so ist die Eintrittszeit

$$\tau_B := \inf\{t \geq 0 : \ X_t \in B\} \qquad \text{mit } \inf \varnothing := \infty$$

eine $\mathbb{F}_+$-Stopzeit. *Hinweis: b)(ii)*

2. (Satz von Radon–Nikodym). Ziel dieser Aufgabe ist es, mit Hilfe des Martingalkonvergenzsatzes eine Variante des Satzes von Radon–Nikodym zu beweisen :
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und sei $\mathcal{F}$ abzählbar erzeugt, d.h. es existieren Mengen $A_n \in \mathcal{F}$, so dass $\mathcal{F} = \sigma(A_n, n \geq 1)$. Sei $\mathbb{Q}$ ein zu $\mathbb{P}$ absolutstetiges W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, d.h. für alle $A \in \mathcal{F}$ gelte: $\mathbb{Q}(A) = 0$, falls $\mathbb{P}(A) = 0$. Dann besitzt $\mathbb{Q}$ eine Dichte bezgl. $\mathbb{P}$, d.h. es existiert eine ZV X, so dass

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} \qquad \forall A \in \mathcal{F}\ .$$

Der Beweis soll nun in folgenden Schritten geführt werden :

a) Definiere zunächst eine Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ durch $\mathcal{F}_n = \sigma(A_1, \ldots, A_n)$. Zeige, dass für jedes n eine eindeutige endliche Menge $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$ existiert, so dass jede Menge in $\mathcal{F}_n$ eine disjunkte Vereinigung von Elementen von $\mathcal{G}_n$ ist.

b) Definiere $\mathbb{Q}_n$ und $\mathbb{P}_n$ als die Einschränkungen von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_n$ und konstruiere explizit die Dichte X_n von $\mathbb{Q}_n$ bezüglich $\mathbb{P}_n$.

c) Zeige, dass $(X_n)_{n\geq 1}$ ein Martingal ist. Benutze den Martingalkonvergenzsatz, um die Existenz einer Dichte X von $\mathbb{Q}$ bezgl. $\mathbb{P}$ zu folgern.

Bemerkung: Die Voraussetzung, dass $\mathcal{F}$ abzählbar erzeugt ist, ist keine starke Einschränkung. Zum Beispiel hat die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ diese Eigenschaft. Die gerade bewiesene Variante lässt sich außerdem leicht verallgemeinern auf σ-endliche Maße auf beliebigen Maßräumen.

3. (Fläche unter der Brownschen Bewegung). Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit $B_0 = 0$ und $b < 0 < a$. Wir definieren

$$M(t) \;=\; \int_0^t B_t \mathrm{d}t - \frac{1}{3}B_t^3 \;.$$

Zeige, dass $(M_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist, und folgere, dass die erwartete Fläche unter dem Graph von B, bis B das Intervall (b, a) verlässt, gegeben ist durch: $-\frac{1}{3}ab(a+b)$.

4. (Dichotomie). Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ ein Martingal mit $X_0 = 0$ und $|X_{n+1} - X_n| \leq M < \infty$ f.s. Wir definieren

$$\begin{aligned} C &= \left\{ \lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert und ist endlich} \right\} , \\ D &= \left\{ \limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty \text{ und } \liminf_{n\to\infty} X_n = -\infty \right\} . \end{aligned}$$

Zeige, dass $\mathbb{P}(C \cup D) = 1$.
Hinweis: Betrachte Stoppzeiten $T_K = \inf\{n : X_n \geq K\}$.