Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 10/11
Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Matthias Erbar/Christian Ketterer

2. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis”

Abgabe bis Fr 28.10., 10 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Gleichgradige Integrierbarkeit und schwache Normen).

a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$ für ein $p > 1$. Zeige, dass (X_n) gleichgradig integrierbar ist.

b) Für eine Zufallsvariable X und $p \geq 1$ ist die schwache L^p-Norm definiert durch

$$\| X \|_{p,w} \quad := \quad \sup_{t>0} t \cdot \mathbb{P}(|X| > t)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Seien nun $1 \leq q < p$. Zeige, dass eine Konstante $C_{q,p} > 0$ existiert, so dass für alle Zufallsvariablen X gilt:

$$\| X \|_q \quad \leq \quad C_{q,p} \cdot \| X \|_{p,w} \quad .$$

2. (Maximalungleichung I). Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal mit $X_0 = 0$ und $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ für alle n. Mit $\langle X \rangle$ bezeichnen wir den eindeutigen vorhersehbaren, wachsenden Prozeß, so dass $X_n^2 - \langle X \rangle_n$ ein Martingal ist und $\langle X \rangle_0 = 0$. Es sei weiter $\langle X \rangle_\infty := \lim_{n\to\infty} \langle X \rangle_n$. Zeige:

a) $\mathbb{E}\Big[\sup_{n\geq 0} X_n^2\Big] \leq 4\, \mathbb{E}\langle X \rangle_\infty$

b) Sei zusätzlich $\langle X \rangle_\infty < \infty$ f.s. Dann gilt f.s. : $\lim_{n\to\infty} X_n$ existiert und ist endlich.

3. (Maximalungleichungen und große Abweichungen).

a) Zeige: Ist (M_n) ein Martingal und $t > 0$, dann gilt

$$\mathbb{P}\left[\max_{k\leq n} M_k \geq c\right] \ \leq \ e^{-tc}\, \mathbb{E}\left[e^{tM_n}\right] \qquad \forall\, c > 0.$$

b) Sei $S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ mit i.i.d. Zufallsvariablen $Y_i \in \mathcal{L}^1$ mit $\mathbb{E}[Y_i] = 0$. Beweise die folgende Erweiterung des Satzes von Chernoff:

$$\mathbb{P}\left[\max_{k\leq n} S_k \geq a \cdot n\right] \ \leq \ e^{-\Lambda^*(a)\cdot n} \qquad \forall\, a > 0,$$

wobei $\Lambda^*(a) = \sup_{t>0}(ta - \Lambda(t)), \ \Lambda(t) = \log \mathbb{E}[e^{tY_1}]$.

4. (Gegenbeispiele).

a) Man betrachte den W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei $\Omega := [0,1[$, $\mathcal{F} := \mathcal{B}([0,1[)$ und $\mathbb{P}$ die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf $[0,1[$ ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{F}_n$ die durch die Zerlegung

$$[0,1[= \bigcup_{j=0}^{2^{n+1}-1} \left[\frac{j}{2^{n+1}}, \frac{j+1}{2^{n+1}}\right[$$

erzeugte σ-Algebra. Ferner sei

$$X_n(\omega) := \begin{cases} 0, & \omega \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right[, \\ 2^{n+1}, & \omega \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2}\right[, \\ 0, & \omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[. \end{cases}$$

Man zeige, daß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, welches zu keinem Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ fortgesetzt werden kann.

b) Sei (B_t) eine eindimensionale Brownsche Bewegung und $M_t = \exp(B_t - t/2)$ das exponentielle Martingal. Zeige, dass die Familie $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichgradig integrierbar ist.