Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 11/12
Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Matthias Erbar/Christian Ketterer

13. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis”

Abgabe bis Di 31.01.12, 10:00 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Nicht-eindeutige Lösungen) Sei (B_t) eine Brownsche Bewegung. Zeige, dass die SDG

$$\mathrm{d}X_t \;=\; 3X_t^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}t + 3X_t^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}B_t\;; \qquad X_0 = 0$$

überabzählbar viele Lösungen der Form

$$X_t^a \;=\; \begin{cases} 0 & 0 \le t \le \tau_0^a \\ B_t^3 & \tau_0^a \le t < \infty \end{cases}$$

mit $\tau_0^a = \inf\{t \geq a : B_t = 0\}$, $a \geq 0$ hat.

2. (Skalierungsfunktionen) Für $-\infty \le l < r \le \infty$ betrachte man auf $]l, r[$ die eindimensionale stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t \;=\; b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t\;; \qquad X_0 \;=\; x \in\,]l, r[$$

mit einer eindimensionalen Brownschen Bewegung B. Dabei seien b, σ und σ^{-2} Borel-messbare, in $]l, r[$ lokal beschränkte Funktionen.
Eine streng monoton wachsende Funktion $s :]l, r[\to \mathbb{R}$ heißt Skalierungsfunktion von X, falls $s(X) - s(X_0)$ ein lokales Martingal ist. Zeige:

a) Jede nicht konstante Lösung der DGL

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s'' + bs' = 0 \text{ auf }]l, r[\tag{1}$$

ist entweder streng wachsend oder fallend. Die Funktion s oder $-s$ ist eine Skalierungsfunktion für X.

b) Ist $s \in \mathcal{C}^2(]l, r[)$ eine Skalierungsfunktion für X, so löst sie die Gleichung (1).

c) Zeige, dass zu $x_0 \in\,]l, r[$ die Funktion

$$s(y) := \int_{x_0}^{y} \exp\left(-2\int_{x_0}^{t} \frac{b}{\sigma^2}(\tau)d\tau\right)dt; \qquad y \in\,]l, r[$$

eine Skalierungsfunktion für X ist.

3. (Eine SDE) Löse die folgende stochastische Differentialgleichung :

$$\mathrm{d}X_t \; = \; \sqrt{1+X_t^2}\,\mathrm{d}B_t + \frac{X_t}{2}\mathrm{d}t \; , \quad X_0 = x \; ,$$

wobei (B_t) eine Brownsche Bewegung ist.

4. (Interagierende Brownsche Bewegungen) Wir betrachten ein System von zwei eindimensionalen Brownschen Teilchen X und Y, die sich gegenseitig abstoßen. Ihre Bewegung wird durch das folgende System stochastischer Differentialgleichungen beschrieben.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}B_t^1 + \frac{\alpha}{X_t - Y_t}\mathrm{d}t \; , \quad X_0 = x \; ; \\ \mathrm{d}Y_t &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}B_t^2 + \frac{\alpha}{Y_t - X_t}\mathrm{d}t \; , \quad Y_0 = y \neq x \; , \end{aligned}$$

wobei $\alpha > \frac{1}{4}$ sowie B_t^1 und B_t^2 zwei unabhängige Brownsche Bewegungen sind. Zeige, dass dieses System eine eindeutige starke Lösung besitzt.
Hinweis: Kontruiere zunächst eine Lösung bis zu einer geeigneten Stoppzeit und erinnere Dich an (die korrigierte Version von) Aufgabe 1, Blatt 11.