Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 11/12
Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Matthias Erbar/Christian Ketterer

12. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Di 24.01.12, 10:00 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Variation der Konstanten) In dieser Aufgabe soll eine Methode entwickelt werden um stochastische Differentialgleichungen folgender Form zu lösen:

$$dX_t = f(t, X_t)\, dt + c(t) X_t\, dB_t, \qquad X_0 = x,$$

wobei $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. Gehe dazu wie folgt vor :

a) Finde eine explizite Lösung Z_t der Gleichung mit $f \equiv 0$.

b) Um die allgemeine Gleichung zu lösen, benutze den Ansatz

$$X_t \;=\; C_t \cdot Z_t \;.$$

Nimm an, dass für jedes $\omega \in \Omega$, die Funktion $t \mapsto C_t(\omega)$ die *deterministische* Differentialgleichung

$$\frac{dC_t(\omega)}{dt} \;=\; f(t, Z_t(\omega) \cdot C_t(\omega))/Z_t(\omega) \;; \qquad C_0 = x$$

löst. Zeige, dass dann $X_t = C_t \cdot Z_t$ eine Lösung der allgemeinen Gleichung ist.

c) Wende obige Methode an um eine Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichungen zu finden:

$$dX_t = \frac{1}{X_t}\, dt + \alpha X_t\, dB_t \;; \qquad X_0 = x > 0,\; \alpha \in \mathbb{R} \;.$$

2. (Lineare stochastische Differentialgleichungen) Seien A und σ zwei $d \times d$–Matrizen, und sei (B_t) eine Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}^d$. Zeige, dass die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ_t \;=\; AZ_t\, dt \;+\; \sigma\, dB_t \;, \qquad Z_0 = z_0,$$

gegeben ist durch

$$Z_t \;=\; e^{tA} Z_0 \;+\; \int_0^t e^{(t-s)A} \sigma\, dB_s \;.$$

3. (Brownsche Brücke) Betrachte die eindimensionale stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T - t} dt + dW_t, \qquad X_0 = a.$$

Hierbei seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig.

a) Zeige, dass für $0 \leq t \leq T$ der Prozess

$$X_t^{a,b} = a \left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T - t) \int_0^t \frac{dW_s}{T - s}$$

eine Lösung der SDGl ist.

b) Berechne $\mathbb{E}X_t^{a,b}$ und $\mathrm{Cov}(X_s^{a,b}, X_t^{a,b})$. Was passiert für $t \uparrow T$?

4. (Transformierte Brownsche Bewegung) Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und sei $h \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ harmonisch und strikt positiv in D. Weiter sei (B_t) eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ mit Start in $x \in D$ und τ_D die Austrittszeit von (B_t) aus D.

a) Zeige, dass der Prozess $Z_t = \frac{h(B_{t \wedge \tau_D})}{h(B_0)}$ ein Martingal ist.

b) Identifiziere den Prozess $L \in \mathcal{M}^{loc}$, so dass $Z = \mathcal{E}(L)$.

c) Zeige, dass unter dem Maß $\mathbb{Q} = Z \cdot \mathbb{P}$ für $0 \leq t < \tau_D$ gilt:

$$\mathrm{d}B_t \;=\; \frac{\nabla h(B_t)}{h(B_t)} \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t \;,$$

wobei (W_t) eine geeignet zu konstruierende bei τ_D gestoppte Brownsche Bewegung unter $\mathbb{Q}$ ist, d.h (W_t) ist ein Martingal mit $\langle W \rangle_t = t \wedge \tau_D$.

d) Zeige, dass unter $\mathbb{Q}$ der Prozess (B_t) die Menge D fast sicher in $A := \{h > 0\} \cap \partial D$ verlässt, d.h. $B_{\tau_D} \in A$.