Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 11/12
Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Matthias Erbar/Christian Ketterer

11. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Di 17.01.12, 10:00 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Bessel Prozesse) Sei (B_t) eine eindimensionale standard Brownsche Bewegung und $\beta > 1$. Wir betrachten einen stetigen Prozeß $(X_t)_{t\geq 0}$, der in $x > 0$ startet, und so dass für $t < \tau_0 := \inf\{s \geq 0 : X_s = 0\}$ gilt:

$$X_t \;=\; x + B_t + \frac{\beta}{2}\int_0^t \frac{1}{X_s}\mathrm{d}s\ .$$

Für $\beta = d-1$ ganzzahlig ist solch ein Prozess durch den aus der Vorlesung bekannten d-dimensionalen Bessel Prozess gegeben. Wir betrachten im folgenden den gestoppten Prozess X^{τ_0} und bezeichnen ihn ebenfalls mit X.

a) Zeige, dass $X_t^{1-\beta}$ ein lokales Martingal ist.

b) Sei $0 < r < x < R$. Wir definieren die Stoppzeit $\tau_r = \inf\{t \geq 0 : X_t = r\}$ und analog die Stoppzeit τ_R. Berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_x[\tau_r < \tau_R]$.

c) Folgere, dass fast sicher gilt $\tau_0 = \infty$.

2. (Bessel-Quadrat Prozess) Sei (B_t) eine d-dimensionale Brownsche Bewegung mit Start in $x \neq 0$ und $d \geq 3$. Wir schreiben $\rho_t := |B_t|$ und definieren den Prozess

$$W_t \;:=\; \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{B_s^i}{\rho_s}\mathrm{d}B_s^i\ .$$

Zeige, dass (W_t) eine standard Brownsche Bewegung ist und dass gilt:

$$\rho_t^2 \;=\; \rho_0^2 + 2\int_0^t \rho_s \mathrm{d}W_s + d\cdot t\ .$$

3. (Green Funktion I) Sei (B_t) eine Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 3$. Wir definieren die Greenfunktion G durch

$$G(x,y) \;:=\; \int_0^\infty p_t(x,y)\mathrm{d}t \;, \qquad x,y \in \mathbb{R}^d,\; x \neq y \;,$$

wobei $p_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^d} \exp(-\frac{|x-y|^2}{2t})$ den Gaußkern bezeichne.

a) Zeige, dass $G(x,y) \;=\; c_d |x-y|^{2-d}$ für eine Konstante c_d und berechne diese.

b) Zeige, dass für alle beschränkten, nichtnegativen Funtionen $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gilt:

$$Gu(x) \;:=\; \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty u(B_t)\mathrm{d}t \right] \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} u(y) G(x,y) \mathrm{d}y \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \;.$$

c) Zeige, dass für alle stetigen Funktionen $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger gilt: $Gu(x) \;<\; \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

4. (Green Funktion II) Sei (B_t) eine Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}^d$ mit $d \leq 2$ und die Green Funktion definiert wie in Aufgabe 3. Sei $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Funktion, so dass die Menge $\{u > 0\}$ positives Maß hat. Zeige, dass dann gilt:

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty u(B_t)\mathrm{d}t \right] \;=\; \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \;.$$