Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 11/12
Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm
Matthias Erbar/Christian Ketterer

10. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

Abgabe bis Fr 23.12.11, 11:00 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)

---

1. (Exponentielle Martingale I) Für ein stetiges Semimartingal X mit $X_0 = 0$ bezeichne $\mathcal{E}(X)_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t)$ das exponentielle Martingal von X. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten:

a) $\mathcal{E}(X)_t \mathcal{E}(Y)_t \;=\; \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y\rangle)_t$,

b) $\big(\mathcal{E}(X)_t\big)^{-1} \;=\; \mathcal{E}(-X + \langle X\rangle)_t$.

2. (Exponentielle Martingale II) Für $n \geq 0$ definieren wir folgende Polynome:

$$H_n(x,y) \;:=\; \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\bigg|_{\alpha=0} \exp(\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 y) \;, \qquad x, y \in \mathbb{R} \;.$$

a) Zeige, dass für diese gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} H_n(x,y) \;=\; n H_{n-1}(x,y) \;, \qquad n \geq 1$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n(x,y) \;=\; 0 \;, \qquad n \geq 0 \;.$$

b) Zeige, dass für jedes stetige lokale Martingal M mit $M_0 = 0$ fast sicher gilt:

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} \mathrm{d}M_{t_n} \cdots \mathrm{d}M_{t_1} \;=\; \frac{1}{n!} H_n(M_t, \langle M\rangle_t)$$

und

$$\exp\left(\alpha M_t - \frac{\alpha^2}{2}\langle M\rangle_t\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} H_n(M_t, \langle M\rangle_t) \;.$$

3. (Konforme Transformation der Brownschen Bewegung) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und sei $f = u + iv$ ihre Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Weiter sei $(Z_t)_{t \geq 0}$ eine zweidimensionale Brownsche Bewegung und $U_t := u(Z_t)$ und $V_t := v(Z_t)$. Berechne $\langle U \rangle_t$, $\langle V \rangle_t$ und $\langle U, V \rangle_t$.
Hinweis: Benutze die Cauchy–Riemann Differentialgleichungen.

4. (Geometrische Brownsche Bewegung) Eine geometrische Brownsche Bewegung mit Parametern $\mu, \alpha \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t \;=\; \mu\, X_t\, dt \;+\; \alpha\, X_t\, dB_t\,.$$

Sie wird z.B. zur Modellierung von Aktienkursen eingesetzt.

a) Finde eine Lösung der SDG mit Anfangsbedingung $X_0 = x_0$ mithilfe des Ansatzes

$$X_t \;=\; x_0 \cdot \exp(aB_t + bt)\,.$$

b) Berechne $E[X_t]$ für $t \geq 0$. Was fällt auf im Fall $0 < \mu < \alpha^2/2$?

c) Berechne $\operatorname{cov}[X_s, X_t]$.