Universität Bonn
Prof. Dr. Sergio Conti
Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, 2017-10-26

Aufgabe 1 (Überabzählbare Reihen)**.** Sei $C < \infty$, I eine Menge und $x : I \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit der Eigenschaft dass für alle endlichen Teilmengen $J \subset I$ gilt

$$\sum_{i \in J} x_i \leq C.$$

Zeigen Sie dass die Menge $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ abzählbar ist. (5 Pkt.)

Aufgabe 2 (Äußerer Jordanscher Inhalt)**.** Für eine beliebige Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$ sei

$$\bar{J}(E) := \inf\{\sum_{j=1}^{K} \mathrm{Vol}(I_j), E \subset \cup_{j=1}^{K} I_j\},$$

wobei das Infimum über alle *endlichen* Überdeckungen von E durch beschränkte abgeschlossene Intervalle genommen wird. Wie üblich ist $\inf \emptyset = \infty$.

(a) Zeigen Sie dass $\bar{J}(E) = \bar{J}(\overline{E})$ für alle $E \subset \mathbb{R}$ gilt, wobei $\overline{E}$ den Abschluss von E bezeichnet. (3 Pkt.)

(b) Finden Sie eine abzählbare Menge E mit $\bar{J}(E) = 1$. (2 Pkt.)

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Kugeln mit Radius $0 < R < \infty$ in $\mathbb{R}^n$ und sei $\alpha > n$. Man definiere die Funktion $\nu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ durch $\nu(B(x, R)) = R^\alpha$. Zeigen Sie dass das von ν erzeugte äußere Maß

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_{B \in \mathcal{R}'} \nu(B), E \subset \cup_{B \in \mathcal{R}'} B, \mathcal{R}' \subset \mathcal{R} \text{ abzählbar}\}$$

identisch verschwindet, d.h. $\mu^*(E) = 0$ für alle $E \subseteq \mathbb{R}^n$. (10 Pkt.)
In diesem Beispiel stimmt μ^* insbesondere auf keinem Element von $\mathcal{R}$ mit ν überein.

Aufgabe 4. (a) Bestimmen Sie ob folgende Abbildungen $\mu_i : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ äußere Maße sind:

$$\mu_1(A) = \begin{cases} 0, & 0 \notin A, \\ 1, & 0 \in A, \end{cases} \qquad \mu_2(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ 1, & A \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$\mu_3(A) = \begin{cases} 0, & \#A < \infty, \\ \infty, & \#A = \infty, \end{cases} \qquad \mu_4(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ 1, & 0 < \#A < \infty, \\ \infty, & \#A = \infty, \end{cases}$$

$$\mu_5(A) = \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \#(A \cap [1, N]), \qquad \mu_6(A) = \liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \#(A \cap [1, N]).$$

(b) Bestimmen Sie ggf. die jeweiligen messbaren Mengen. (12+8 Pkt.)