Abgabe in der Vorlesung am Montag, 2017-06-12

Aufgabe 1. (a) Sei $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$. Zeigen Sie dass die Funktion $f(z) = z^{-n}$ auf C nicht durch Polynome in z gleichmäßig approximiert werden kann. (5 Pkt.)

(b) Finden Sie eine stetige Funktion $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ die nicht durch Polynome in z gleichmäßig approximiert werden kann. (5 Pkt.)

Aufgabe 2 (Fouriertransformationen). (a) (Poissonkern) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \frac{1}{1 + (x/t)^2} e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, t > 0. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

(b) (Sekans Hyperbolicus) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Hinweis: was ändert sich man x durch $x \pm \pi i$ ersetzt?

Aufgabe 3 (Maximumprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Man nehme an dass die Funktion $|f(z)|$ in einem $z_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum besitzt, das heißt dass ein $r > 0$ existiert sodass für alle $z \in B_r(z_0)$ gilt $|f(z)| \leq |f(z_0)|$. Zeigen Sie dass f konstant ist. (10 Pkt.)

Aufgabe 4 (Satz von Hadamard über drei Geraden). Sei f eine beschränkte stetige Funktion auf dem Streifen $\{0 \leq \Re z \leq 1\}$ die in seinem Inneren $\{0 < \Re z < 1\}$ holomorph ist und sei $F(\theta) := \sup_{\Re z = \theta} |f(z)|$. Zeigen Sie dass

$$F(\theta) \leq F(0)^{1-\theta} F(1)^{\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Hinweis: führen Sie dies auf den Fall $F(0) = F(1) = 1$ zurück. Betrachten Sie dann die Funktion $f(z)e^{\epsilon z(z-1)}$. (10 Pkt.)