Sommersemester 2017 Universität Bonn
Komplexe analysis Prof. Dr. Sergio Conti
Übungsblatt 6 Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Montag, 2017-05-29

Aufgabe 1. Zeigen Sie dass
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$
Hinweis: benutzen Sie die holomorphe Funktion $f(z) = \frac{e^{ix}-1}{ix}$. (5 Pkt.)

Aufgabe 2. Sei $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine stetige Funktion die auf $B_1(0)$ holomorph ist mit $|z| = 1 \implies |f(z)| = 1$. Zeigen Sie dass f konstant ist. Hinweis: setzen Sie f auf $\mathbb{C}$ fort durch $f(z) = 1/\overline{f(1/\overline{z})}$ für $|z| > 1$. (10 Pkt.)

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Man nehme an dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^{(n)}(z) = 0$ existiert. Zeigen Sie dass f ein Polynom ist. Hinweis: finden Sie einen Häufungspunkt. (5 Pkt.)

Aufgabe 4. (a) Sei $R > 0$ und $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie
$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{z \in B_R(0)} |f(z)|, \quad n \geq 1.$$
(2 Pkt.)

(b) Sei f eine ganze Funktion die die Wachstumsbedingung $|f(z)| \leq C|z|^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $C < \infty$ erfüllt. Zeigen Sie dass f ein Polynom vom Grad $\leq k$ ist. (4 Pkt.)

(c) Sei $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph, $R > 0$. Zeigen Sie
$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2R^n} \sup_{z \in B_R(0)} |f(z) - f(e^{\pi i/n} z)|, \quad n \geq 1.$$
Hinweis: führen Sie den Variablenwechsel $\zeta \mapsto e^{\pi i/n}\zeta$ in der Cauchy-Integralformel durch. (4 Pkt.)

Aufgabe 5. In dieser Aufgabe betrachen wir holomorphe Funktionen auf $B_1(0)$ die sich nicht zu holomorphen Funktionen auf strikt größeren zusammenhängenden offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ fortsetzen lassen.

(a) Sei $f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^{2^n}$. Zeigen Sie dass für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0^{2^k} = 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\lim_{r \to 1-} f(rz_0) = \infty$. (5 Pkt.)

(b) Sei $f(z) = \sum_{n=0}^\infty 2^{-n} z^{2^n}$. Zeigen Sie dass f zu einer stetigen Funktion auf $\overline{B_1(0)}$ fortgesetzt werden kann, f' aber nicht. (5 Pkt.)