Sommersemester 2017 | Universität Bonn
Komplexe analysis | Prof. Dr. Sergio Conti
Übungsblatt 4 | Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Montag, 2017-05-15

Aufgabe 1. Welche der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ sind Realteile holomorpher Funktionen? Geben Sie die holomorphe Funktion ggf. an.

(a) $x^2 - y^2$ (2 Pkt.)

(b) $x^2 + y^2$ (2 Pkt.)

(c) $x^3 - 3xy^2$ (2 Pkt.)

(d) $e^x \cos x$ (2 Pkt.)

(e) $e^x \cos y$ (2 Pkt.)

Aufgabe 2. Die *Riemannsche Sphäre* ist die Menge $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (da wir in dieser Aufgabe nicht auf die topologische und analytische Struktur von $\mathbb{C}^*$ eingehen werden diese nicht definiert). Für eine invertierbare Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit Einträgen in $\mathbb{C}$ ist die zugehörige *Möbiustransformation* $\phi_A : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ definiert als

$$\phi_A(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \neq \infty \\ \frac{a}{c}, & z = \infty, \end{cases}$$

wobei $w/0 = \infty$ gesetzt wird.
Zeigen Sie

$$\phi_A \circ \phi_{A'} = \phi_{AA'}$$

für alle Matrizen A, A'. (10 Pkt.)

Aufgabe 3. Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$. Berechnen Sie $\int_\gamma z^n \mathrm{d}z$ für $n \in \mathbb{Z}$. (10 Pkt.)

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe bezeichnet $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion.

(a) Zeigen Sie dass die Funktion $\log|z|$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ harmonisch ist. (3 Pkt.)

(b) Nehmen Sie an dass eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ existiert mit $\Re f(z) = \log|z|$. Zeigen Sie $f'(z) = 1/z$. (4 Pkt.)

(c) Zeigen Sie dass Letzteres unmöglich ist, es also keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f'(z) = 1/z$ existiert. Hinweis: verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 3. (3 Pkt.)