Sommersemester 2017
Komplexe analysis
Übungsblatt 3

Universität Bonn
Prof. Dr. Sergio Conti
Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Montag, 2017-05-08

Aufgabe 1. Die *Wirtinger-Ableitungen* einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind definiert als

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Die Rechenregeln für reelle partielle Ableitungen dürfen in dieser Aufgabe ohne Beweis verwendet werden.

(a) Zeigen Sie dass eine Funktion f in einem Punkt z genau dann komplex differenzierbar ist wenn sie dort reell total differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$. (3 Pkt.)

(b) Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offene Teilmengen und $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{C}$ (total) reell differenzierbare Funktionen sowie $h = g \circ f$. Beweisen Sie die Kettenregel

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}. \qquad (4 \text{ Pkt.})$$

(c) Sei $\Delta := (\frac{\partial}{\partial x})^2 + (\frac{\partial}{\partial y})^2$ der Laplaceoperator. Zeigen Sie

$$4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \Delta \quad \text{auf } C^2(\mathbb{C} \to \mathbb{C}). \qquad (3 \text{ Pkt.})$$

Aufgabe 2. (a) Geben Sie ein Beispiel einer Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 die für alle z mit $|z| = 1$ konvergiert. (2 Pkt.)

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 die für kein z mit $|z| = 1$ konvergiert. (2 Pkt.)

(c) Sei $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeigen Sie dass für jedes z mit $|z| < R$ die Funktion f um den Punkt z in eine Potenzreihe $f(z+h) = \sum_{n\geq 0} b_n h^n$ mit Konvergenzradius $\geq R - |z|$ entwickelt werden kann. (6 Pkt.)

Aufgabe 3 (Partielle Summation). (a) Sei $z \in \mathbb{K}$ Element eines Körpers mit $z \neq 1$. Zeigen Sie

$$1 + \cdots + z^k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \qquad (2 \text{ Pkt.})$$

(b) Seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ Elemente eines Körpers und $A_k = a_1 + \cdots + a_k$. Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \qquad (3 \text{ Pkt.})$$

(c) Zeigen Sie dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$ für alle $z \neq 1$ mit $|z| = 1$ konvergiert. (2 Pkt.)

(d) Seien $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ und sei $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe. Zeigen Sie dass

$$\lim_{r\to 1, r<1} \sum_{k=1}^{\infty} r^k a_k = S \qquad (3 \text{ Pkt.})$$

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^{2^k}}{1 - w^{2^{k+1}}} = \frac{w}{1 - w}, \quad |w| < 1,$$

indem Sie beide Seiten in Potenzreihen entwickeln. (5 Pkt.)

(b) Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k w^{2^k}}{1 + w^{2^k}} = \frac{w}{1 - w}, \quad |w| < 1. \qquad (5 \text{ Pkt.})$$

Begründen Sie jeweils den Wechsel der Summationsordnung.