Sommersemester 2017
Komplexe analysis
Übungsblatt 2

Universität Bonn
Prof. Dr. Sergio Conti
Dr. Pavel Zorin-Kranich

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, 2017-04-27

Aufgabe 1. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (|xy|^{1/2}, 0).$$

Zeigen Sie dass diese Funktion im Punkt $(0,0)$

(a) partiell differenzierbar ist, (3 Pkt.)

(b) die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, (3 Pkt.)

(c) aber nicht total (und damit auch nicht komplex) differenzierbar ist. (4 Pkt.)

Aufgabe 2. Ein topologischer Raum Ω heißt *zusammenhängend* falls jede Zerlegung $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ in zwei disjunkte offene Teilmengen von der Form $\Omega \cup \emptyset$ ist sowie *wegzusammenhängend* falls für alle $x, y \in \Omega$ eine stetige Abbildung $f : [0,1] \to \Omega$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ existiert.
Eine Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ heißt *stückweise linear* falls $0 = t_0 < \dots < t_N = 1$ existieren sodass g auf jedem Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ linear ist.

(a) Sei Ω wegzusammenhängend. Zeigen Sie dass Ω zusammenhängend ist. (2 Pkt.)

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine *offene* zusammenhängende Teilmenge. Zeigen Sie dass Ω wegzusammenhängend ist.

Hinweis: betrachten Sie für ein festes $x \in \Omega$ die Teilmenge

$$\Omega_1 = \{y \in \Omega : \exists f \in C([0,1] \to \Omega) : f(0) = x, f(1) = y\}$$

der Punkte die mit x durch einen stetigen Pfad verbunden sind sowie die Teilmenge $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ der Punkte die mit x nicht verbunden sind. Zeigen Sie dass Ω_1 und Ω_2 offen sind. (4 Pkt.)

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : [0,1] \to \Omega$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie dass eine stückweise lineare Funktion $g : [0,1] \to \Omega$ mit $g(0) = f(0)$ und $g(1) = f(1)$ existiert. (4 Pkt.)